ISTRUZIONE DI MATEMATICA

PER USO

DE' REALI ALUNNI MACCHINISTI

Dedicata

A S.R.M. FERDINANDO II.

DA

NUNZIO FERRANTE

Capitano di Artiglieria, Professore di matematiche pure ed applicate nella Scuola de' mentovati alunni.

NAPOLI,

REAL TIPOGRAFIA MILITARE

1844.

Sacra Real Maestà

Signore,

Vostra Maestà quanto è potente, altrettanto protegge con generosa magnanimità le scienze e le arti. E chi ignora quanto al Real Animo di V. M. torna più in grado di diffondere tra sudditi l'opere di sua splendida beneficenza, che collegare quelle lodi, le quali pure a buon diritto le sono dovute!

L'aver V. M. richiamate a novella vita fra noi le scienze e le arti più utili ed espedienti, fan chiaro come nel bel fiore della giovinezza e fra le alte cure dello Stato abbia con plauso generale e contento saputo conciliare coi vantaggi che vengono dalla pace quella gloria e quella sicurezza che son dovute alle arti della Milizia.

Il Reale Opificio di Pietrarsa, e la Scuola degli Allievi Macchinisti sono opere veramente degne di somma

ammirazione, non pure per la utilità grandissima che ne torna alla Nazione, ma ancora per averci francati dall' obbligo di ricorrere agli stranieri anche per quella parte che riguarda la costruzione delle macchine a vapore. Queste oggidì possono ben dirsi l'anima di ogni moto. Ora nel dedicare a V. M. un corso di matematiche pure ed applicate per la istruzione di quei giovani prescelti Alunni; son certo che la M. V. si degnerà gradirlo con quella clemenza che fa più belle le eminenti virtù del nobilissimo animo che l' adorna.

Di V. M.

Umilissimo, e fedelissimo suddito
NUNZIO FERRANTE.

PRELIMINARE.

L'oggetto della presente Istruzione di Matematica, quello si è di manudurre i giovani Alunni Macchinisti allo studio della meccanica applicata alle macchine, e metterli nella possibilità di poter consultare nelle occorrenze le opere degl' insigni matematici, che hanno scritto largamente su tal subbietto.

Se in altra guisa procedesse la bisogna ai nostri dì, il paese non avrebbe che semplici artefici, come per lo addietro, capaci solamente di rendere l'arte loro manuale ed idiota, e quando in qualche urgenza, luogo, o tempo occorresse, come ben spesso occorrerà, s'incaglierebbe sempre nella dura, ed umiliante necessità di aver ricorso allo straniero per tuttociò che risguarda costruzione e guida di ogni ordigno, e strumenti delle macchine in generale, precipuamente in tutto quello che attiensi alle macchine a vapore. Sono desse applicate con tanta utilità e successo, e per render brevissime le lunghe distanze, che fanno florido il commercio, e vieppiù a dar animo a quasi tutte le industrie produttrici delle comodità della vita.

I macchinisti sforniti delle indispensabili conoscenze della matematica, non debbonsi considerare, secondo Muratori, che come tanti automi, che agiscono, e lavorano macchinalmente, come macchine che operano con tanta energìa, quanto ne ha la mano, che le spinge: val quanto dire sono macchine, non persone di macchine, ed in conseguenza le loro idee terminate, circoscritte e relegate potrebbero essere di ostacolo a quel che molto meglio saprebbe desiderarsi. In soccorso di queste verità concorrono le opere di Borgnis, di Achette, di Monge, di Tredgold, di Poncelet, e d'infiniti altri sommi matematici. La meccanica dunque congiunta alla pratica delle costruzioni, opera que' prodigi che formano per così dire le meraviglie del nostro secolo; nè vale quella sentenza, che a taluni detta una turpe e crassa ignoranza, potersi giungere allo scopo con la pratica semplicemente, perocchè con questa altro non si fa che seguire ciecamente i precetti della teorica affiancati dagli sperimenti e nulla più.

Per non maggiormente dilungarci su questo argomento di già validamente discusso infinite volte, senza tema di errare possiamo asserire che, la scienza delle macchine ha bisogno di lumi trascendenti, e tutto ciò che si mette in opera, altro non è che il risultamento della teorica, come dalle mentovate opere si apprende.

La idea di farci pervenire allo scopo ci ha imposto l'obbligo di dare a stampa la presente Istruzione, dettata agli Alunni Macchinisti nelle ore delle lezioni, per togliere la noiosa fatiga di applicarsi a quelle carte, che sebbene siano state dalle loro mani vergate, per lo più non intelligibili, od infoscate, e guadagnare in tal modo un tempo tanto prezioso pel loro insegnamento.

Ci siamo ingegnati di trattare le teoriche nelle diverse parti della scienza, con la massima brevità, evitando il superfluo e la parte di semplice adornamento, eseguendone però le applicazioni quasi sempre ai numeri, onde far conoscere la utilità delle formole, e congiungere così le nozioni astratte coi risultamenti concreti.

L'Aritmetica comprende fino alla teorica delle frazioni

decimali, essendoci sembrato più profittevole di esporre nell'Algebra le regole del tre tanto espedienti, e tutte le altre che ne dipendono: e ciò per renderne più agevoli le applicazioni ai casi particolari.

Nell'Algebra abbiamo stimato di vantaggio, e maggiore opportunità d'inserire un trattato compendiato di logaritmi, non che l'indispensabil maneggio delle corrispondenti tavole; esponendo benanche con qualche digressione, le ragioni e proporzioni sì aritmetiche che geometriche, spiegando ancora l'estrazione della radice quadrata e cubica, non avendole incluse nell'aritmetica.

La Geometria piana che s'insegna ai nostri giovani è quella di Euclide, sulla ragione che a preferenza di tutte le altre finora stampate, conduce maggiormente a quell'ammirabile giustezza di sillogismi, che sviluppano fortemente la ragione umana; e quantunque essa abbia avuto degl'innovatori, pure è rimasta salda contro i ragionamenti altrui per venti continuati secoli. Questo prezioso libro è stato costantemente la prima scorta dei matematici, e pure si è quasi sempre presentato sotto varie forme, e si è avuto in mira di contaminarlo. Noi però senza appartarci dal testo, ci abbiamo fatto diverse giunte per l'unico oggetto di pervenire ad alcune formole risguardanti le applicazioni alle quantità discrete, ritraendole dai principî che nel prelodato libro si trovano. E se abbiamo la taccia di averlo anche noi ridotto in altra forma, avremo però commesso un fallo soltanto anzichè averlo trasformato e contaminato. In breve le aggiunte in disamina son di base a quelle applicazioni tanto opportune, e di agio ai giovani macchinisti; le quali rendonsi facilissime, dopo però aver bene studiato il libro di un tanto immortale Geometra.

Il quinto libro della mentovata Geometria è trattato nelle medesime aggiunzioni con l'algebra, ed il secondo del pari; insegnandosi anche ai giovani come leggesi nel testo. Varî problemi e teoremi si trovano dimostrati, e questi sono di utilità nel prosieguo della istruzione, dando termine alle aggiunte con le costruzioni geometriche delle equazioni del primo e del secondo grado.

Un rapido cenno si è fatto sulla Trigonometrìa rettilinea, spiegando il modo come servirsi delle tavole trigonometriche ed inserendovi ancora i precetti per la risoluzione de' triangoli.

La Geometria Solida è trattata pure con brevità, stabilendo sempre formole da potersi facilmente applicare ai numeri, tanto per la misura della superficie, quanto per la misura del volume de' corpi.

Nella Descrittiva si è avuto in mira di esporre la parte solamente che dipende dalle semplici proiezioni; e ciò per mettere nel caso i giovani di poter disegnare con principî una macchina lor posta avanti, e rendersi agevoli da un disegno costruire un modello, e viceversa da un disegno costruire la corrispondente macchina.

La Meccanica è esposta di una maniera semplicissima, nella quale la parte razionale non è disgiunta dalle applicazioni. Abbiamo consultate le opere più recenti della meccanica industriale, e precipuamente abbiamo avuto di scorta la immortale Opera del Poncelet.

Siccome la parte di assoluta necessità per ogni maniera di macchine sono le ruote dentate, così abbiamo fatto, alla Istruzione mentovata, un appendice riguardante gl' ingranaggi.

Infine un secondo appendice abbiamo compilato sulle nozioni primordiali della Fisica e della Chimica, non che alcuni precetti su i metalli, ed altre cognizioni indispensabili per un giovane macchinista.

PARTE PRIMA.

ARITMETICA.

DEFINIZIONI.

Tuttocciò che può ricevere aumento o decremento dicesi *quantità*. Tale è la lunghezza, la superficie, la solidità, il moto, la luce ec.

L' Unità è quella quantità alla quale si rapportano tutte le altre della stessa specie, per essere valutate, o misurate. Per esempio una lunghezza di 7^m è una quantità, l' unità di misura di questa lunghezza è il metro, per valutare detta lunghezza, bisogna riferirla ad un metro, e con ciò si acquista la idea della lunghezza in disamina.

Il *Numero* è la unione di più unità. Le cifre numeriche, o i numeri semplici sono

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
zero.	*uno.*	*due.*	*tre.*	*quattro.*	*cinque.*	*sei.*	*sette.*	*otto.*	*nove.*

Così 8 indica l'unità presa otto volte. Dunque le quantità di lunghezza, si esprimono con numeri, le quantità di peso anche con numeri, così ec. Per esempio sette kilogrammi si scrivono con la cifra 7, sette miglia si scrivono con la cifra 7, ec. Conseguita da ciò che un numero stesso può indicare infinite quantità.

L'*Aritmetica* è la scienza de'numeri. Quindi daremo il modo, come leggere, e scrivere i numeri.

NUMERAZIONE.

1. Il numero **78** si legge settantotto, la cifra 8 indica le unità, la cifra 7 indica le decine, perciocchè 78 costa di settanta unità, e di otto unità, cioè settanta indica sette decine, ed otto esprime le otto unità.

Così pure **378**, si legge trecentosettantotto, la cifra 8 indica le unità, la cifra 7 indica le decine, e la cifra **3** le centinaia, infatti 378 costa di trecento unità, di settanta unità, e di otto unità; cioè trecento indica tre centinaia, settanta indica sette decine, ed otto le otto unità. Similmente **1378** si legge milletrecentosettantotto; questo numero contiene otto unità, sette decine, tre centinaia ed un migliaio; del pari **51378**, si legge cinquantunomilatrecentosettantotto; un tal numero equivale ad otto unità, sette decine, tre centinaia, un migliaio, e cinque decine di migliaia; infine **651378** si legge seicentocinquantunomilatrecentosettantotto; numero formato di otto unità, sette decine, tre centinaia, un' unità di migliaia, cinque decine di migliaia, e sei centinaia di migliaia.

Da ciò risulta, che *la prima cifra di un numero, cominciando da destra, indica sempre le unità, la seconda le decine, la terza le centinaia, la quarta le migliaia, la quinta le decine di migliaia, la sesta le centinaia di migliaia.*

Dopo le centinaia di migliaia vengono i milioni, dimanierachè se il numero costa di sette cifre conterrà le unità di milioni, se di otto cifre le decine di milioni, se di nove cifre le centinaia di milioni, se di dieci cifre le migliaia di milioni.

Dopo le migliaia di milioni, vengono i bilioni; se il numero è formato di undici cifre indica unità di bilioni, se di dodici cifre le decine di bilioni, se di tredici cifre le centinaia di bilioni, e così proseguendo.

Dopo i bilioni succedono i trilioni, dopo i trilioni, i quatrilioni, quintilioni ec.

Ciò posto si vuol leggere il numero **2365489814785**. Si divida questo numero per classi, ciascuna di sei cifre, da destra a sinistra, con virgole, e viene **2,365489,814785**. Con ciò si legge così

$$\overbrace{2}^{2\ \textit{bilioni}}\ ,\ \overbrace{365}^{365\ \textit{mila}}\ \overbrace{489}^{489\ \textit{milioni}}\ ,\ \overbrace{814}^{814\ \textit{mila}}\ \overbrace{785}^{785}\ .$$

Del pari

$$\overbrace{356}^{356\ bilioni},\ \overbrace{794}^{794\ mila}\ \overbrace{683}^{683\ milioni},\ \overbrace{275}^{275\ mila}\ \overbrace{234}^{234}.$$

Con questo modo facile si può leggere un numero composto di quante cifre si voglia.

2. Si debba scrivere il numero centoventiquattromilottocentoventitremilioniottocentosettantaduemilacinquecentoventitrè.

Dove si scorge che il numero giunge alle migliaia di milioni, per quel che antecedentemente si è detto, esso dovrà costare di dodici cifre, le prime sei di sinistra indicano le migliaia di milioni, le seconde sei esprimono le centinaia di migliaia, le decine di migliaia, le centinaia, le decine e le unità; così il numero sarà

$$\overbrace{124}^{124\ mila}\ \overbrace{823}^{823\ milioni},\ \overbrace{872}^{872\ mila}\ \overbrace{523}^{523}.$$

Le regole dell' Aritmetica sono quattro; ***Addizione***, ***Sottrazione***, ***Moltiplicazione***, e ***Divisione***, che partitamente dichiareremo.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DE' NUMERI INTERI.

3. L' addizione, *è una regola che insegna a riunire più numeri, esprimenti quantità della stessa specie, in un solo, cotesto numero è quello che dicesi la* somma *de' numeri proposti.*

Si voglia trovare la somma de' numeri

17543, 1748, 3584, 189, 88, 7.

Si scrivano uno sotto l' altro, dimanierachè tutte le unità di ciascun numero siano fra loro in corrispondenza, come ancora le decine, le centinaia, le migliaia ec. Indi si addizio-

nano i numeri di ciascuna colonna, incominciando da quella delle unità, in seguito quelli della seconda colonna, della terza, della quarta. ec. Da ciò risulta

	17543
	1748
	3584
	189
	88
	7
Somma	23159

Questa somma si è ottenuta dal considerare che le 3 unità, con le 8, con le 4, con le 9, con le 8, e con le 7 fanno 39. Un tal numero è composto di 3 decine, e 9 unità, queste ultime si sono scritte sotto la colonna delle unità de' numeri dati, e le 3 decine si sono unite a quelle scritte nella colonna precedente. In conseguenza si è ragionato così; 3 decine provvenienti dalla colonna antecedente unite alle decine 4,4,8,8,8 di ciascun numero, le quali compongono la seconda colonna formano 35 decine, le quali sono eguali a 5 decine, e 3 centinaia: le 5 decine si sono notate sotto la colonna delle decine, e le 3 centinaia unite alle centinaia 5,7,5,1 di ciascun numero, le quali compongono la terza colonna formano 21 centinaia, che sono eguali ad un centinaio, e due migliaia; il centinaio 1 si è scritto sotto la colonna delle centinaia, e le 2 migliaia unite alle migliaia 7,1,3 di ciascun numero, componenti la quarta colonna formano 13 migliaia, pari a 3 migliaia, ed 1 decina di migliaia, le tre migliaia si sono situate sotto la colonna delle migliaia, e la decina 1 di migliaia unita all' altra decina di migliaia componente la quinta colonna formano due decine di migliaia, che si sono scritte nella somma in corrispondenza delle decine di migliaia; quindi la somma de' numeri proposti è 23159. Nell' addizione i numeri dati si dicono comunemente i *termini parziali*, e la somma il *termine totale*.

4. È da notare che i numeri da addizionarsi debbano esprimere quantità della medesima specie; perciocchè se si trattasse di sommare 7 kilogrammi con cinque metri, si avrebbe la somma 12 che altro non indica, senonchè l'unione de' due numeri astratti 7 e 5; ma però il 12 non esprime nè 12 kilogrammi, nè 12 metri; ciò nasce dall' essere 7^k di diversa specie di 3^m. Quindi è che i numeri si possono sempre addi-

zionare considerati astrattamente, ossia prescindendo dalla specie delle quantità indicate da essi; e che se i numeri da addizionare esprimessero quantità di diversa specie, la corrispondente somma non esprimerebbe la unione delle quantità, ma bensì la somma de' numeri.

5. *La* sottrazione *è una regola che insegna a togliere da un numero maggiore un numero minore della stessa specie: ciò che rimane dicesi* differenza, *o* residuo.

Si voglia trovare la differenza fra 27407, e 9875.

Si scrivano l'uno sotto l'altro, dimodochè le unità di ambo i numeri siano in una stessa colonna verticale, come pure le decine, le centinaia ec. Dopo dalle unità del primo numero si tolgano le unità del secondo numero, dalle decine del primo numero si tolgano quelle del secondo, e così in seguito, ciò che rimane è appunto il residuo, o la differenza; infatti

27407 *sottraendo*
 9875 *sottrattore*
differenza. . . 17532

Questa differenza si è ottenuta dal considerare, che dalle 7 unità del numero maggiore toltene le 5 unità del numero minore rimangono due unità, che si sono scritte sotto la colonna delle unità; indi dalle decine del numero superiore non potendo togliere le 7 decine del numero inferiore, si è preso un centinaio dalle centinaia 4, che sono 10 decine, ed unite a 0 decine, formano 10 decine, da queste tolte le 7 decine del numero inferiore, restano 3 decine, le quali si sono situate nella colonna delle decine de'due numeri. Inoltre le centinaia 4 del numero maggiore sono ridotte a 3, perciò si seguita a ragionare, dalle centinaia 3 non si possono togliere le centinaia 8 del numero minore, per cui si prende un migliaio ossia 10 centinaia dalla classe 7 delle migliaia, che unite alle 3 centinaia formano 13 centinaia, da queste tolte le 8 centinaia, rimangono 5 centinaia le quali si lasciano sotto la colonna delle centinaia.

Indi il 7 che dinota le migliaia rimane 6 migliaia, dalle quali non si possono togliere le 9 migliaia del numero inferiore, perciò si prende dalle 2 decine di migliaia una decina di migliaia, ossia 10 migliaia, che unite alle 6 migliaia formano 16 migliaia, da cui tolte le 9 migliaia rimangono 7 migliaia, che notate si vedono nella differenza. Infine le 2

decine di migliaia son rimaste **1** decina di migliaia, la quale si è scritta nella differenza perchè niente ci è da togliere.

In questa operazione è da dirsi lo stesso di quello che si è detto nel (§. **4.**).

6. Il numero **27407**, maggiore si suole chiamare *sottraendo*, ed il numero **9875** minore suol dirsi *sottrattore*; in generale i due numeri si chiamano i *termini* della sottrazione, cioè il sottrattore, primo termine, ed il sottraendo secondo termine; la differenza suol dirsi anche il terzo termine della sottrazione.

Per avere una compruova che la sottrazione bene si è eseguita, conviene fare l'operazione inversa, cioè la somma onde distruggere con questa la operazione già eseguita, o per meglio dire è chiaro il ravvisare che sommando il secondo ed il terzo termine, ossia il numero minore colla differenza, si dovrà ottenere il numero maggiore. Così

	9875	*numero minore*
	17532	*differenza*
somma. . .	27407	*numero maggiore*

Questa somma dà certezza che la sottrazione si è eseguita senza errore alcuno.

Se vogliasi accennare la somma di più numeri senza eseguire la regola, si scrivono uno dopo l'altro tramezzandoli col segno $+$ *più*. Così per sommare **8**, con **50**, con **44**, e con **12**, si scrive $8+50+44+12$. Una tal somma è accennata senza esser però eseguita: e si legge **8** più **50** più **44** più **12**.

Volendosi poi eseguire la regola si scrive $8+50+44+12=114$, queste due lineette $=$ si chiamano *segno di eguaglianza*. In una parola il segno $+$ si pone innanzi a ciascun dato numero; ed il segno $=$ si mette innanzi la somma.

Per accennare poi la sottrazione di due numeri, si tramezzano dal segno $-$ *meno*. Così $70-32$ significa che da **70** si vuol togliere **32**; volendo eseguire questa regola accennata si scrive $70-32=38$; ossia il segno $-$ si scrive innanzi il numero da sottrarsi, ed il segno $=$ avanti il residuo. Innanzi il **70** s'intende il segno $+$.

MOLTIPLICAZIONE DE' NUMERI INTERI.

7. *La* moltiplicazione *è una regola la quale, dati due numeri, insegna a trovarne un terzo tale, che sia eguale ad uno dei numeri dati preso tante volte per quante unità contiene l' altro.*

I due numeri dati si dicono i *fattori* della moltiplicazione, e quel che si cerca si chiama *prodotto* di questi fattori.

Moltiplicare 7 per 3 significa che il numero 7 debbasi ripetere 3 volte, cosicchè 7 moltiplicato per 3 vuol dire 7 sommato con 7, e sommato un'altra volta con 7, cioè $7+7+7=21$; il 21 è il prodotto de' due fattori 7, e 3.

Per indicare che un numero debba moltiplicarsi per un altro si scrive il primo fattore, indi il segno $\times$, o un punto, e poi si scrive l' altro fattore; il $\times$, o il punto equivale alla parola *moltiplicato*; così 7×3, oppure $7 . 3$ si pronunzia 7 moltiplicato per 3. Ed eseguendo questa moltiplicazione accennata, si scrive $7\times3=21$, ciò significa che il prodotto di 7 per 3 è 21. Per eseguire la moltiplicazione di due numeri, conviene ritenere a memoria i prodotti de' numeri semplici; quali prodotti si possono ricavare dalla seguente tavola detta *Pittagorica*.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

8. Moltiplicare 1743 per 256 si avrà

$$\begin{array}{r} 1743 \\ 256 \\ \hline 10458 \\ 8715 \\ 3486 \\ \hline 446208 \end{array}$$

1.° Si sono situati i numeri l'un sotto l'altro, come nella somma, e nella sottrazione.

2.° Si è moltiplicato il primo fattore per le 6 unità che contiene il secondo, cioè a dire si è moltiplicato il 6 per 1743, incominciando dall'ultima cifra, cioè dalle unità 3; e si è detto $6 \times 3 = 18$ questo numero è composto di 8 unità le quali si son trascritte sotto le unità de' due numeri, ed una decina che se n'è tenuto conto; poi si sono moltiplicate le unità 6 per le 4 decine, cioè $6 \times 4 = 24$ decine più la decina antecedente da valutarsi si hanno 25 decine, che formano 5 decine che son trascritte sotto le decine dei due fattori, e due centinaia da tenersene conto; inoltre si è detto 6×7 centinaia $= 42$ centinaia più le due centinaia antecedenti si hanno 44 centinaia, le quali formano 4 centinaia, già notate sotto le centinaia de' due numeri, e 4 migliaia da tenersene conto; in seguito si è moltiplicato 6 unità per 1 migliaio, e si è avuto 6 migliaia che unite alle 4 antecedenti formano 10 migliaia notate sotto le migliaia dei fattori.

3.° Si è moltiplicato il primo fattore per le 5 decine del secondo, ossia si è detto 5 decine moltiplicate per 3 unità si hanno 15 decine che formano 5 decine situate sotto le decine del prodotto antecedente, ed un centinaio da tenersene conto: dopo si è detto 5 decine moltiplicate per le 4 decine del primo fattore fanno 20 centinaia più il centinaio antecedente si hanno 21 centinaia che compongono 1 centinaio e 2 migliaia, il primo si è notato sotto le centinaia 4, e le seconde si son tenute in conto; quindi si è detto 5 decine moltiplicate per 7 centinaia formano 35 migliaia più le due migliaia antecedenti si hanno 37 migliaia eguali a 7 migliaia più 3 decine di migliaia; le 7 migliaia si son trascritte sotto le migliaia, e le 3 decine di migliaia si sono valutate in seguito: indi si è ragionato così 5 decine moltiplicate per 1 migliaio fanno 5 decine di migliaia più le tre decine di migliaia antecedenti compongono 8 decine di migliaia, le quali si sono notate sotto le decine di migliaia.

4.° Infine le 2 centinaia del secondo fattore si sono moltiplicate per le cifre del primo; ossia 2 centinaia moltiplicate per 3 fanno 6 centinaia che sono scritte sotto la colonna delle centinaia de' numeri antecedenti, e qui non si è tenuto conto di alcun numero, perciocchè le centinaia non contengono le migliaia; indi 2 centinaia moltiplicate per 4 decine fanno 8 migliaia che si sono benanche notate sotto le migliaia: 2 centinaia moltiplicate per 7 centinaia formano 14 decine di migliaia pari a 4 decine di migliaia notate nel proprio posto più 1 centinaio di migliaia da valutarsi; in seguito 2 centinaia moltiplicate per 1 migliaio formano 2 centinaia di migliaia più 1 centinaio di migliaio si hanno 3 centinaia di migliaia poste al loro sito.

5.° In ultimo si sono sommati i 3 prodotti parziali ottenuti, e si è avuto il prodotto totale 446208.

9. Tuttocciò secondo la definizione (§. 7.) equivale a dire prendere il numero **1743**, **256** volte, ossia replicarlo **6** volte, più **50** volte, più **200** volte, la qual cosa si ha nel quadro qui appresso.

6 × 1743	.... =	**10458**
50 × 1743	.... =	**87150**
200 × 1743	.... =	**348600**
256 × 1743	.... =	**446208**

Se questa somma si scrive nel modo seguente

10458
8715
3486
446208

si avrà quello ottenuto col ragionamento antecedente. Da ciò conseguita che la moltiplicazione ottenuta in questo secondo modo, dimostra che l' andamento praticato nel paragrafo antecedente conduce allo scopo.

10. Moltiplicare **14784** per **7804**; significa prendere il numero **14784**, **7804** volte, cioè **4** volte, più **0** volte, più **800** volte, più **7000** volte, la regola viene

4 × 14784	...... =	**59136**
0 × 14784	...... =	**00000**
800 + 14784	...... =	**11 827200**
7000 × 14784	...... =	**103 488000**
7804 × 14784	...... =	**115,374336**

Trascrivendo nell' altro modo (§. 8.)

$$\begin{array}{r}
14784 \\
\underline{7804} \\
59136 \\
00000 \\
11\,8272 \\
\underline{103\,488} \\
115{,}374336
\end{array}$$

Da ciò si scorge la cagione perchè eseguendo la moltiplicazione in questo secondo modo più compendiato del primo, i prodotti parziali vanno scritti in maniera che l' ultima cifra di ciascuno corrisponda alla penultima dell' antecedente.

DIVISIONE DEI NUMERI INTERI.

11. *La* divisione *è una regola, fra due numeri, che insegna a trovarne un terzo, il quale faccia conoscere quante volte il numero dato minore si contiene nel maggiore.*

Il numero minore dicesi *divisore*, il maggiore *dividendo*, ed il numero che si cerca *quoziente*.

Così **12** diviso per **4** significa conoscere quante volte il **4** si contiene in **12**; il **4** dicesi divisore, il **12** dividendo; e siccome il **4** si contiene **3** volte in **12**, il **3** dicesi quoziente.

Le espressioni $\frac{12}{4}$, e $12:4$ significano entrambi **12** diviso per **4**; onde si scrive $\frac{12}{4}=3$, e $12:4=3$.

Se il divisore non si contiene esattamente nel dividendo, come per esempio $\frac{8}{5}=1$, e ne rimangono **3**; percui si dice che il **5** si contiene in **8** una volta, ma però vi è l' avanzo di **3** che chiamasi *residuo*.

12. Dividere il numero **13456** per **9**; cioè a dire conoscere quante volte il **9** si contiene in **13456**: si ha

	1495	*Quoziente*
Divisore... 9	13456	*Dividendo*
	9	
	44	
	36	
	85	
	81	
	46	
	45	
	1	*Residuo*

Si tiene il seguente ragionamento; il **9** in **13** si contiene **1** volta, quindi si è scritto **1** al quoziente, cioè a dire **9** unità in **13** decine di migliaia si contengono **1000** volte, e siccome dopo le migliaia del quoziente debbono succedere le centinaia, le decine, e le unità, così si è scritto **1** in quarto posto anzichè **1000**; poscia si è moltiplicato il quoziente **1** per **9**, e si è avuto **9**, cioè a dire **9** migliaia le quali si sono scritte sotto alle **13** migliaia; dalle quali si son tolte; il residuo è **4** migliaia, sì dopo le **9** migliaia che dopo le **4** migliaia non si sono notati i corrispondenti zeri, perciocchè **9** e **4** si trovano sotto la colonna delle migliaia. Si è affianco del residuo **4** scritto la terza cifra **4** del dividendo, ciò significa **44** centinaia, percui si dice; **9** si contiene in **44** centinaia **400** volte, e siccome **400** significa **4** centinaia, così nel quoziente si è scritto **4** nel posto delle centinaia, cioè dopo le migliaia; indi si moltiplica, il quoziente **4** pel divisore **9**, e si ha **36** centinaia che sottratte da **44** centinaia danno di residuo **8** centinaia, si scrivono le **5** decine, cioè quarta cifra del dividendo cominciando da sinistra, dopo il residuo **8**, e si hanno **85** decine, le quali contengono il divisore **9**; **90** volte, e perciò nel quoziente si scrive **9** nel posto delle decine, poscia il quoziente **9** moltiplicato pel divisore **9** da **81** decine che sottratte da **85** decine, danno **4** decine di differenza. Quindi l'ultima cifra **6** del dividendo si scrive alla destra del residuo **4**, e si ha **46** unità le quali contengono il divisore **9**, **5** volte che si scrive al quoziente; indi si moltiplica il quoziente **5** pel divisore **9**, ed il prodot-

to 45 si sottrae dalle 46 unità antecedenti, e si nota il residuo 1. Si conchiude perciò, che il 9 si contiene in 13456, 1495 volte col residuo 1.

13. Per maggior chiarezza della regola spiegata si fa notare, che 13456 diviso per 9 significa dividere 13000,400, 50, e 6, per 9; i quattro quozienti che si ottengono, sommati insieme, daranno il quoziente del numero proposto. Infatti

$$\frac{13000}{9}=1000 \text{ col residuo } 4000$$

$$\frac{400+4000}{9}=\frac{4400}{9}=400 \text{ col residuo } 800.$$

$$\frac{50+800}{9}=\frac{850}{9}=90 \text{ col residuo } 40.$$

$$\frac{6+40}{9}=\frac{46}{9}=5 \text{ col residuo } 1.$$

Dunque il quoziente che si cerca sarà eguale a $1000+400+90+5=1495$. col residuo 1.

La maniera laboriosa di eseguire in tal modo la divisione, dimostra che la breve regola esposta come nel paragrafo antecedente coincide colla presente, e perciò ci serviamo del primo metodo, anzichè di questo.

14. Per conoscere se bene si è operato, conviene moltiplicare, come è chiaro, il divisore pel quoziente, ed aggiungervi il residuo; questa somma deve dare il dividendo.

Infatti il divisore 9 moltiplicato pel quoziente 1495 dà 13455, più il residuo 1 si ha il dividendo 13456.

15. Dividere 14354374 per 2899, si ha

```
                        4951.    Quoziente
Divisore 2899        14354374    Dividendo
                     11596
                     27583
                     26091
                      14927
                      14495
                        4324
                        2899
                        1425    Residuo
```

Il quoziente si è ottenuto mediante la regola seguente.

Si sono da sinistra a destra del dividendo prese in veduta cinque cifre, mettendo cioè sul 4 un segno, ossia si è segnato un numero nel dividendo, il primo ad essere maggiore del divisore, senza considerare le rimanenti cifre del primo. Si è detto il 2 in 14 si contiene 7 volte, cioè la prima cifra del divisore si contiene nelle due prime del dividendo 7 volte; ma 8 seconda cifra del divisore non si contiene in 3 terza cifra del dividendo 7 volte, quindi è il 2 in 14 non può contenersi 7 volte, dunque si potrà contenere 6 volte, col residuo 2, che situato innanzi a 3 fa 23, l'8 in 23 non entra 6 volte, quindi il 2 in 14 si può contenere 5 volte col residuo 4 che posto innanzi a 3 fa 43, l'8 in 43 ha luogo 5 volte col residuo 3 che posto innanzi a 5 quarta cifra del dividendo fa 35, ma il 9 terza cifra del divisore non si contiene in 35, 5 volte, perciò neppure il 2 si contiene nel 14, 5 volte, si faccia dunque contenere 4 volte, col residuo 6 che fa 63, l'8 in 63 si contiene 4 volte col residuo 31 che posto innanzi a 5 fa 315, il 9 in 315 si contiene 4 volte col residuo 279 che posto innanzi a 4 fa 2794, ed il 9 in questo numero entra benissimo 4 volte. Dopo esserci assicurati di ciò, il 4 si scrive nel quoziente; è facile il ravvisare che il quoziente 4 indica 4 migliaia, Poscia si moltiplica il quoziente 4 pel divisore 2899, ed il prodotto 11596 si scrive sotto le prime 5 cifre del dividendo, si è eseguita la sottrazione, ed il residuo è 2758 migliaia. Se la sottrazione dà un residuo maggiore del divisore, è segno che il quoziente va aumentato, se poi il prodotto del quoziente pel divisore non si può sottrarre dalle cifre valutate del dividendo, è segno che il quoziente va diminuito; quest' avvertenza vale per tutto il corso della operazione.

Alla destra del residuo 2758 si scrive il 3 sesta cifra del dividendo, ed il raziocinio che si è fatto per trovare il quoziente 4 si è replicato tra il dividendo 27583, ed il divisore 2899, il cui quoziente 9 si è moltiplicato pel divisore, e si è ottenuto 26091 che si è scritto sotto 27583, il residuo è stato 1492 centinaia. Si è abbassata la cifra 7 a destra di questo residuo, indi si è detto 14927 contiene 2899, 50 volte, perciò si è scritto 5 nel quoziente al posto delle decine, in seguito si è moltiplicato 2899 per 5, e si è ottenuto 14495 che sottratto dall' ultimo dividendo ha dato di residuo 432 decine; poi a destra di queste decine si sono unite le 4 unità, ultima cifra del divisore, e si è avuto 4324, che

contiene il divisore 2899, 1 volta, che si è scritto al quoziente; il prodotto di questo quoziente pel divisore è 2899 il quale si è sottratto da 4324, ed il residuo è stato 1425.

Si noti che essendo ciascun residuo della divisione sempre minore del divisore, ne risulta che mettendo in fine di ciascun residuo una cifra qualunque, non si potrà ottenere nel quoziente una cifra maggiore di 9.

Se nello scrivere a destra di un residuo la corrispondente cifra del dividendo, risultasse un numero minore del divisore, nel quoziente bisognerebbe scrivere il zero, e notare quindi la cifra del dividendo che è immediatamente dopo quella di già notata, cioè a dire bisogna scrivere tante cifre del dividendo a destra del residuo, fino a che il dividendo parziale diventi maggiore del divisore.

16. Per avere una dimostrazione di fatto, dell'esposto metodo della divisione, bisogna moltiplicare il divisore pel quoziente ed aggiungervi il residuo, e con ciò

$$\begin{array}{lrl}
\textit{Moltiplicare} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{r} 2899 \\ 4951 \end{array} & \begin{array}{l} \textit{Divisore} \\ \textit{Quoziente} \end{array} \\
\hline
 & 2899 & \\
 & 14495 & \\
 & 26091 & \\
 & 11596 & \\
 & 1425 & \textit{Residuo} \\
\hline
 & 14354374. &
\end{array}$$

Questo numero è precisamente il dato dividendo, quindi è che la regola da noi spiegata conduce a dare con esattezza il quoziente che si cerca fra due numeri.

FRAZIONI.

17. *Una espressione numerica che indica una o più parti eguali dell'unità divisa, dicesi* rotto, *o* frazione.

Così $\frac{5}{7}$ significa l'unità divisa in 7 parti eguali, delle quali se ne calcolano 5; questa espressione si legge cinque settimi; il numero inferiore 7 si chiama denominatore, cioè a dire esso dinota in quante parti eguali l'unità si è divisa, ed il numero superiore 5 si dice numeratore, ed esprime quante di tali parti se ne prendono.

Si vede da ciò, che *una frazione altro non significa che*

una divisione accennata, il divisore della quale è il denominatore, ed il dividendo ne è il numeratore

La frazione che ha il numeratore maggiore del denominatore, si dice *impropria*, o *spuria*, purchè il numeratore contenga il denominatore con qualche residuo. Tale è ciascuna delle frazioni $\frac{7}{5}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{4}{3}$ ec.

Se il numeratore contiene esattamente il denominatore, la frazione dicesi *apparente*. Le frazioni $\frac{8}{4}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{100}{10}$ ec. sono tutte frazioni apparenti.

Quando il numeratore è minore del denominatore, la frazione dicesi *vera*.

Così $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{99}{100}$.... ec., sono tutte frazioni vere.

18. *Per prendere la metà, la terza parte, la quarta parte ec. di una frazione, ossia per dividerla per 2, 3, 4 ec. si moltiplica semplicemente il denominatore per 2, per 3, per 4 ec.* Infatti di $\frac{5}{6}$ la metà è $\frac{5}{12}$; perciocchè nel fratto $\frac{5}{12}$ l'unità è divisa in 12 parti eguali, e nel fratto $\frac{5}{6}$, la stessa unità è divisa in 6 parti eguali, per cui una delle prime sarà metà di una delle seconde, quindi 5 delle prime saranno metà di 5 delle seconde; ma 5 delle prime sono espresse da $\frac{5}{12}$, e 5 delle seconde sono indicate da $\frac{5}{6}$, quindi $\frac{5}{12}$ è metà di $\frac{5}{6}$. Così pure di $\frac{5}{6}$ la terza parte sarà $\frac{5}{18}$ poichè $\frac{5}{18}$ significa l'unità divisa in 18 parti eguali, e $\frac{5}{6}$ vuol dire la stessa unità divisa in 6 parti eguali, onde una delle prime parti sarà terza parte di una delle seconde, e 5 delle prime saranno terza parte di 5 delle seconde, ossia $\frac{5}{18}$ sarà terza parte di $\frac{5}{6}$, così proseguendo.

19. *Per prendere il doppio, il triplo, il quadruplo ec. di una frazione, ossia per moltiplicarla per 2, per 3, 4, ec. convien moltiplicare semplicemente il suo numeratore per 2, 3, 4 ec.* Di $\frac{7}{9}$ il doppio è $\frac{14}{9}$, il triplo è $\frac{21}{9}$, ec. perciocchè

nella frazione $\frac{14}{9}$ l'unità è divisa in 9 parti eguali, nella frazione $\frac{7}{9}$ l'unità è divisa in 9 parti eguali, dunque una delle prime parti sarà eguale ad una delle seconde, 14 delle prime saranno doppie di 7 delle seconde, e così ec.

20. *Una frazione non si altera se si divide sì il numeratore che il denominatore per uno stesso numero*; così $\frac{2}{3}$ è eguale a $\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}=\frac{2\times3}{3\times3}=\frac{6}{9}$, $\frac{2}{3}=\frac{2\times7}{3\times7}=\frac{14}{21}$ ec. perciocchè il doppio di $\frac{2}{3}$ è (§. 19) $\frac{4}{3}$, la metà di $\frac{4}{3}$, è (§. 18) $\frac{4}{6}$; qui tanto $\frac{2}{3}$, che $\frac{4}{6}$ sono la metà di $\frac{4}{3}$, in conseguenza $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; e così degli altri.

21. *Una frazione non si altera se si divide sì il numeratore che il denominatore per uno stesso numero.*

Essendo (§. 20) $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; da $\frac{4}{6}$ si perviene a $\frac{2}{3}$ con dividere tanto 4 che 6 per 2; essendo $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$; da $\frac{6}{9}$ si perviene a $\frac{2}{3}$ con dividere tanto il numeratore 6 quanto il denominatore 9 per 3; dunque ec.

22. Quando si può dividere sì il numeratore che il denominatore di un fratto per uno stesso numero, allora conviene eseguire una tale operazione, la quale dicesi ridurre i fratti a *minimi termini*, o a *minime espressioni*: *per esempio* $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$, ciò si è avuto con dividere sì il 12 che il 24 per 12, e chiaro apparisce essere più facile valutare nelle regole aritmetiche $\frac{1}{2}$ che $\frac{12}{24}$.

Non sempre riesce facile di trovare un numero che divida esattamente sì il numeratore che il denominatore; intanto per i fattori, numeri semplici, si tengono le norme seguenti.

1.° *Un numero pari può sempre dividersi per 2*; così 12, 18, ... 56 ec. sono numeri divisibili per 2; quindi $\frac{36}{42}=\frac{18}{21}$.

2.° *Un numero la somma delle cui cifre è divisibile per*

3, esso potrà dividersi per 3; esempio, 1731 può dividersi per 3, e la somma delle cifre è $1+7+3+1=12$, il quale può dividersi per 3; possono anche dividersi per 3, i numeri 27, 723, 1821 ec., la somma delle cifre di ciascuno di essi è 9, 12, 12; questi tre numeri sono divisibili per 3. Il fratto $\frac{522}{2721}=\frac{174}{907}$, si è diviso sì 522; che 2721 per 3.

3.° *Un numerò che abbia le due ultime cifre divisibili per 4, esso potrà dividersi per 4.*

I numeri 1712, 9832 ec. possono dividersi per 4; le due cifre ultime di ciascun numero 12, 32 ec. possono dividersi per 4.

Il fratto $\frac{1536}{1712}=\frac{384}{428}=\frac{96}{107}$.

4.° *Un numero che termina in 0, o in 5, e divisibile per 5;* tali sono i numeri 10,100...... 1515, 125 ec. Il fratto $\frac{50}{135}=\frac{10}{27}$, l'altro $\frac{115}{1925}=\frac{23}{385}$.

5.° *Un numero pari divisibile per 3 può dividersi per 6.* I numeri 36, 42, 132, 2802 ec. possono dividersi per 6. I fratti $\frac{36}{42}$, $\frac{132}{2802}$, sono rispettivamente eguali a $\frac{6}{7}$, $\frac{22}{467}$.

6.° *Ogni numero che abbia le 3 ultime cifre divisibili per 8 esso potrà dividersi per 8.*

I numeri 176, 1344, 17416 ec. sono divisibili per 8; e le ultime tre cifre 176, 344, 416 ec. sono divisibili per 8. I fratti $\frac{176}{1344}$, $\frac{1344}{17416}$, ec. sono eguali rispettivamente a $\frac{22}{168}$, $\frac{168}{2177}$.

7.° *Un numero è divisibile per 9, quando la somma delle cifre può dividersi per 3;* i numeri 117, 252, 855, 1341, sono tutti divisibili per 9. La somma delle cifre di ciascun numero è $1+1+7=9$, $2+5+2=9$, $8+5+5=18$, $1+3+4+1=9$.

Così $\frac{117}{252}=\frac{13}{28}$, $\frac{855}{1341}=\frac{95}{149}$.

8.° *Un numero che termina in zero può dividersi per 5 e per 10.* I numeri 10, 20, 30...... 170, 1020, sono divisibili per 5, e per 10. Così $\frac{20}{100}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$; $\frac{100}{120}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

In quanto poi ai numeri divisibili per 7, non vi sono regole brevi per poterli conoscere.

Per vedere se tra due numeri ve n' abbia un altro che si contenga in essi esattamente, e che sia il massimo fra tutti quelli che potrebbero esserci, conviene fare una regola che esporremo, la quale serve a ridurre una frazione ai minimi termini possibili, senza pervenirci con altre frazioni intermedie.

Ridurre $\frac{182}{2249}$ a minimi termini

R E G O L A.

12 *Quoziente*
Divisore 182 | 2249 *Dividendo*
182
429
364
1.° *residuo* 65

2
182
130
2.° *residuo* 52

1
65
52
3.° *residuo* 13

4
52
52
4.° *residuo* 00

Si divide il denominatore ossia il numero maggiore 2249 pel numeratore, ossia pel numero minore 182, si ha il quoziente 12 del quale non si tiene verun conto, ed il primo residuo 65; indi il divisore 182 si divide pel residuo 65, e si ha per quoziente 2, e per secondo residuo 52: poscia si divide il divisore 65 per 52, e si ha per quoziente 1, e per terzo residuo 13; inoltre 52 si divide per 13, il quoziente è 4, ed il quarto residuo è zero; qui terminano le divisioni, e si conchiude che l'ultimo divisore 13 è il *massimo comun divisore* fra i numeri 182, e 2249. Una pruova della regola si è, che ciascuno di questi due numeri può dividersi per 13, dunque $\frac{182}{2249}=\frac{14}{173}$; 14, e 173 non contengono altri numeri esattamente, come è facile il verificarlo.

Se eseguendo la regola accennata, l'ultimo residuo è eguale ad 1 anzichè a 0, un segno è questo che la data frazione

non può ridursi a minimi termini, vale a dire che tra il numeratore, ed il denominatore non vi è divisore di comune, ed i numeri diconsi *numeri primi fra loro.*

SOMMA DELLE FRAZIONI.

23. Sommare, o aggiugnere le frazioni $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$, si scrive $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{3+5+7}{8}=\frac{15}{8}$ somma richiesta. Siccome $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$, indicano tutti e tre che l'unità si è divisa in 8 parti eguali, per cui tali frazioni indicano, la prima 3 di queste parti, la seconda 5 di queste parti, la terza 7 di queste parti, perciò tutti e tre indicheranno 15 di queste parti, cioè $\frac{15}{8}$; conseguita perciò la regola, che *per sommare i fratti dello stesso denominatore, bisogna sommare i numeratori, e sotto una tal somma scriverci per denominatore il denominatore de' dati fratti.*

24. *Per ricavare gl' interi da un fratto spurio, conviene eseguire la divisione del numeratore pel denominatore, se vi ha residuo, gli si scrive per denominatore lo stesso del fratto, e la frazione spuria sarà eguale al quoziente, più questa frazione.* Così $\frac{13}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$ (§. 23) $=1+1+1+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$ risultamento che si ha eseguendo la detta divisione.

25. *Per ridurre un intero ed un fratto ad un sol fratto dello stesso denominatore, bisogna fare il prodotto dell' intero pel denominatore del fratto, aggiungervi il numeratore, e scriverci per denominatore il denominatore dato.* Così $7\frac{3}{5}=\frac{5\times7+3}{5}=\frac{35+3}{5}=\frac{38}{5}$; infatti $7\frac{3}{5}=\frac{35}{5}+\frac{3}{5}=\frac{38}{5}$.

26. Sommare le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ si scrive $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$. E siccome queste frazioni non sono parti omogenee della stessa unità, giacchè la prima indica l'unità divisa in 2 parti. la seconda indica l'unità divisa in 3 parti, e la terza indica l'unità divisa in 5 parti, per cui conviene ridurle come nel

(§. 23) a parti simili dell'unità, cioè a dire allo stesso denominatore. *Ciò si esegue con moltiplicare il numeratore di ciascuna frazione pei denominatori degli altri, e scrivere sotto ciascun prodotto, il prodotto de' dati denominatori;* onde

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=1\frac{23}{30}.$$

$$\frac{1\times3\times5}{2\times3\times5}+\frac{2\times2\times5}{2\times3\times5}+\frac{3\times2\times3}{2\times3\times5}$$

$$\frac{15}{30}+\frac{20}{30}+\frac{18}{30}=(\S.\ 23)\,\frac{15+20+18}{30}=$$

$\frac{53}{30}=(\S.\ 24)\ 1\frac{23}{30}$. Infatti $\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$, perciocchè si è moltiplicato tanto il numeratore 1 che il denominatore 2 per 15; $\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$, poichè tanto 2 che 3 si è moltiplicato per 10 infine $\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$ essendosi moltiplicato tanto il 3 che il 5 per 6, per cui in vece di sommare $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, si son sommati $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, e $\frac{18}{30}$, frazioni che hanno lo stesso denominatore.

27. Sommare $2\frac{3}{4}$, $5\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{2}$, si avrà

$$2\frac{3}{4}+5\frac{2}{3}+7\frac{1}{2}.$$

La somma corrispondente può eseguirsi, o col sommare prima le frazioni, e dipoi gl'interi, oppure col ridurre ciascun intero e la corrispondente frazione ad una frazione spuria (§. 25). In questo secondo modo si ottiene

$$\frac{11}{4}+\frac{17}{3}+\frac{15}{2}.$$

Riducendo allo stesso denominatore si avrà, (§. 26)

$$\frac{66}{24}+\frac{136}{24}+\frac{180}{24}=\frac{66+136+180}{24}=\frac{382}{24}=15\frac{22}{24}(\S.24)=15\frac{11}{12}.$$

Nel primo modo si ottiene

$$\begin{aligned}2\frac{3}{4} &= 2\frac{18}{24}\\ 5\frac{2}{3} &= 5\frac{16}{24}\\ 7\frac{1}{2} &= 7\frac{12}{24}\\ \hline & \;15\frac{11}{12}\end{aligned}$$

Cioè si son ridotte le frazioni allo stesso denominatore, si son inoltre sommate, han dato $\frac{46}{24}=1\frac{22}{24}=1\frac{11}{12}$, l' $\frac{11}{12}$ si è scritto sotto le frazioni, e l' unità intera si è aggiunta ai dati numeri interi, percui la somma totale ottenuta è $15\frac{11}{12}$.

SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI.

28. *Di due frazioni che hanno lo stesso denominatore la maggiore è quella che ha il numeratore maggiore*; così $\frac{7}{8}$ è maggiore di $\frac{5}{8}$, perciocchè in ambo i fratti l' unità è divisa in 8 parti eguali, il primo però indica che di queste parti se ne valutano 7, ed il secondo indica che se ne valutano 5.

29. *Di due fratti che hanno lo stesso numeratore, il maggiore è quello che ha il denominatore minore*; cioè $\frac{13}{7}$ è maggiore di $\frac{13}{9}$, perciocchè il primo fratto esprime l' unità divisa in 7 parti, il secondo fratto esprime l'unità divisa in un maggior numero di parti, ossia in 9, quindi una delle prime parti sarà maggiore di una delle seconde, onde 13 delle prime saranno maggiori di 13 delle seconde, dunque ec.

30. Conseguita da questi due paragrafi, che *per conoscere di due fratti qual sia il maggiore, conviene ridurli allo stesso denominatore, il maggiore sarà quello che ha il numeratore maggiore*. Così fra $\frac{11}{14}$, e $\frac{7}{8}$ conoscere qual sia il maggiore; poichè

$$\frac{11}{14}=\frac{11\times 8}{14\times 8}=\frac{88}{14\times 8},\ \text{e}\ \frac{7}{8}=\frac{7\times 14}{14\times 8}=\frac{98}{14\times 8},$$

siccome $\frac{98}{14\times 8}$ è maggiore di $\frac{88}{14\times 8}$, perciò conchiudiamo essere $\frac{7}{8}$ maggiore di $\frac{11}{14}$. Lo stesso può verificarsi riducendo i fratti allo stesso numeratore, sarà maggiore quello che ha il denominatore minore.

Tra $\frac{8}{9}$, e $\frac{13}{15}$ conoscere il fratto maggiore.

$$\frac{8}{9} = \frac{8 \times 13}{9 \times 13} = \frac{8 \times 13}{117}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{13 \times 8}{15 \times 8} = \frac{13 \times 8}{120}:$$

quindi $\frac{8}{9}$ è maggiore di $\frac{13}{15}$.

31. *Per togliere da un fratto maggiore un altro fratto minore, ma con lo stesso denominatore, convien, come è chiaro, (§. 23) dal numeratore maggiore toglierne il numeratore minore, e scrivere sotto questa differenza il denominatore comune.* Per esempio, togliere da $\frac{14}{17}$, $\frac{7}{17}$, si avrà

$$\frac{14}{17} - \frac{7}{17} = \frac{14-7}{17} = \frac{7}{17};$$

Il fratto $\frac{7}{17}$ sarà il richiesto residuo.

32. *Per togliere da un fratto maggiore un altro minore, conviene ridurre prima i fratti allo stesso denominatore (§.26) e poi eseguire l'operazione come nell'antecedente paragrafo.*

Togliere da $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, si ha

$\frac{7}{8} - \frac{5}{6}$, ovvero $\frac{42}{48} - \frac{40}{48} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$; perciò $\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{1}{24}$ che è il richiesto residuo.

Se si volesse verificare la regola, converrebbe sommare il fratto minore $\frac{5}{6}$ col residuo $\frac{1}{24}$, e dovrebbe aversi il fratto maggiore $\frac{7}{8}$.

Per sottrarre da un intero ed un fratto un altro intero e fratto, bisogna di ciascun intero e fratto formarne un sol fratto, ridurre questi fratti impropri allo stesso denominatore, ed eseguire quindi la sottrazione de' numeratori (§31).

Togliere da $8\frac{2}{3}$, $5\frac{3}{4}$; si avrà

$$8\frac{2}{3} = \frac{26}{3},\ 5\frac{3}{4} = \frac{23}{4},\ \text{dunque } 8\frac{2}{3} - 5\frac{3}{4} = \frac{26}{3} - \frac{23}{4} =$$

$$\frac{26 \times 4}{3 \times 4} - \frac{23 \times 3}{3 \times 4} = \frac{104}{12} - \frac{69}{12} = \frac{104-69}{12} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12};$$

$$\text{perciò } 8\frac{2}{3} - 5\frac{3}{4} = 2\frac{11}{12}.$$

Lo stesso residuo poteva ottenersi nel seguente modo

$$8\frac{2}{3}=8\frac{8}{12}=7\frac{20}{12}$$
$$5\frac{3}{4}=5\frac{9}{12}=5\frac{9}{12}$$
$$\overline{2\frac{11}{12}}$$

Cioè si è ragionato così, da $\frac{2}{3}$ ossia da $\frac{8}{12}$ non si possono togliere $\frac{3}{4}$, ossia $\frac{9}{12}$, percui si prende da 8 una unità, e si toglie da $1\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, che è lo stesso da $\frac{20}{12}$ togliere $\frac{9}{12}$, e rimane $\frac{11}{12}$: questo residuo si è notato sotto le frazioni de' due numeri. Indi l'8 rimane 7, dal quale toltone 5, la differenza è 2: quindi è che il residuo richiesto emerge $2\frac{11}{12}$.

MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI.

33. *Per moltiplicare un intero per una frazione, conviene moltiplicare semplicemente il numeratore della frazione pel dato intero, e scrivere per denominatore sotto ad un tal prodotto il denominatore dato.*

Moltiplicare 4 per $\frac{5}{6}$: significa prendere $\frac{5}{6}$, 4 volte; perciò $4\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=\frac{20}{6}$ richiesto prodotto; il quale pareggia $3\frac{1}{3}$, cioè $4\times\frac{5}{6}=\frac{20}{6}=3\frac{2}{6}=3\frac{1}{3}$.

34. *Per moltiplicare due frazioni, convien moltiplicare i numeratori, ed i denominatori fra loro; il primo prodotto sarà il numeratore; ed il secondo prodotto sarà il denominatore del prodotto che si cerca.*

Moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{7}{8}$.

Poichè $\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}$ significa (§. 18) prendere di $\frac{7}{8}$ la terza parte, ossia $\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{24}$; da ciò risulta $2\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}=2\times\frac{7}{24}$;

ma $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, e $2 \times \frac{7}{24} = \frac{14}{24}$ (§. 33), dunque $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{14}{24} = \frac{2 \times 7}{3 \times 8}$. Con ciò resta dimostrato la enunciata regola.

35. *Per moltiplicare interi e fratti, per interi e fratti, bisogna ridurre ciascuno de' due fattori ad una sola frazione; ed eseguire poi la regola come nel paragrafo antecedente.*

Moltiplicare $7\frac{3}{4}$ per $5\frac{2}{3}$; si ottiene $7\frac{3}{4} \times 5\frac{2}{3} = \frac{31}{4} \times \frac{17}{3} = \frac{527}{12} = 43\frac{11}{12}$ prodotto richiesto.

Convien notare che il prodotto di due frazioni è sempre minore di ciascun fattore, verità facilissima a potersi dimostrare.

DIVISIONE DELLE FRAZIONI.

36. *Per dividere una frazione per un' altra si rivolta il divisore, e si esegue la moltiplicazione come nella scorsa teoria.*

Dividere $\frac{7}{8}$ per $\frac{3}{5}$.

Poichè $\frac{7}{8} : 3$ significa prendere di $\frac{7}{8}$ la terza parte; quindi $\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{3.8}$ (§. 18) ossia $\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3.8}$.

Inoltre $\frac{7}{8} : \frac{3}{5}$ deve dare un quoziente cinque volte maggiore di $\frac{7}{8} : 3$, giacchè il dividendo $\frac{7}{8}$ è lo stesso, il primo divisore 3 è quintuplo del secondo divisore $\frac{3}{5}$, dovrà essere il secondo quoziente cinque volte maggiore del primo quoziente; ma $\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{3.8}$, dovrà essere $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{3.8} \times 5 = \frac{7.5}{3.8} = \frac{35}{24}$.

37. *Per dividere un intero e fratto, per un intero e fratto, bisogna prima formare due fratti spuri; rivoltare il divisore, ed eseguire il prodotto* (§. 33)

Dividere $6\frac{2}{3}$ per $5\frac{3}{4}$; $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$, $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$; perciò $6\frac{2}{3} \cdot 5\frac{3}{4} = \frac{20}{3} : \frac{23}{4}$ (§. 36) $= \frac{20}{3} \times \frac{4}{23} = \frac{80}{69} = 1\frac{11}{69}$. Dunque

$$6\frac{2}{3} : 5\frac{3}{4} = 1\frac{11}{69}.$$

Se si moltiplica il quoziente $1\frac{7}{23}$ pel divisore $5\frac{3}{4}$, si dovrà avere il dividendo $6\frac{2}{3}$. Quando ciò accade, segno evidente è che la regola va esente da errori.

FRAZIONI DECIMALI.

38. *Le frazioni che hanno per denominatore l' unità seguita da uno o più zeri diconsi frazioni decimali;* tali sono le frazioni

$$\frac{7}{10}, \frac{8}{100}, \frac{74}{100}, \frac{124}{1000} \text{ ec.}$$

Le frazioni decimali soglionsi scrivere come gl' interi, e ciò per calcolarle come questi, con certe avvertenze che in seguito esporremo.

Scrivere $\frac{274}{1000}$ in forma di numero intero.

Essendo $\frac{274}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{4}{1000} = \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{4}{1000}$. In questa somma non ci sono interi, percui si supplisce con un zero, dopo del quale si pone una virgola, dopo di questa si scrivono le 2 decime, poscia le 7 centesime, ed infine le 4 millesime, dimanierachè

$$\frac{274}{1000} = 0,\ 274.$$

Così pure $\frac{75}{1000} = \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 0,\ 075.$

Il primo fratto $\frac{274}{1000}$ dunque contiene 2 decimi, 7 centesimi, e 4 millesimi, il secondo è formato di 7 centesimi, e 5 millesimi.

Viceversa, *per formare di un decimale una frazione ordinaria, bisogna scrivere per numeratore le cifre a destra della virgola, e per denominatore l' unità seguita da tanti zeri per quante sono le dette cifre.*

In conseguenza $0,\ 732 = \frac{732}{1000}$, $0,017 = \frac{017}{1000} = \frac{17}{1000}$;

$$0,0031 = \frac{0031}{10000} = \frac{31}{10000}.$$

Formare un fratto del decimale $7,\ 21 = \frac{721}{100}$; come ancora $27,\ 003 = \frac{27003}{1000}$; cioè *un decimale con interi è egua-*

le ad un fratto spurio, chè abbia per numeratore le date cifre, astrazion facendo della virgola, per denominatore quello che appartiene alla parte decimale.

39. *Per prendere di un fratto decimale, la decima, la centesima, ... parte, convien passare la virgola da destra a sinistra per uno, due..... posti.*

Prendere di 0, 017 la decima parte, si ha

$0,017 = (\S.\ 38)\ \frac{17}{1000}$; la decima parte di questa frazione è $(\S.\ 18)\ \frac{17}{10000}$; ma $\frac{17}{10000} = (\S.38)\ 0,0017$, dunque **0, 0017** è la decima parte di **0, 017**.

Prendere di **0, 134** la centesima parte.

La decima parte è **0, 0134**, la decima parte di questo è **0,00134**, dunque **0,00134** sarà la centesima parte di **0,134**, e così proseguendo.

La decima parte di **172, 32** è **17,232**.

La centesima parte è **1, 7232**.

La millesima parte è **0,17232**; e così seguitando.

40. *Per prendere il decuplo, il centuplo ec. di un decimale, bisogna passare la virgola da sinistra a destra di uno, due ec. posti.*

Prendere il decuplo di **0, 132**, ossia moltiplicarlo per **10**.

Poichè $0,132 = \frac{132}{1000}$; quindi

$$10 \times 0,132 = 10 \times \frac{132}{1000} = \frac{1320}{1000} = \frac{132}{100} = (\S.\ 39)\ 1,32$$

Così pure $100 \times 0,132 = 100 \times \frac{132}{1000} = \frac{13200}{1000} = \frac{132}{10} =$ **13, 2**; e così seguitando.

41. *Un decimale non altera di valore, se dopo le sue cifre si tolgano gli zeri quando vi sono.* Cioè a dire $0,170 = 0,17$; perciochè $0,170 = \frac{170}{1000} = \frac{17}{100} = 0,17$. Similmente $0,1300 = 0,13$; infatti $0,1300 = \frac{1300}{10000} = \frac{13}{100} = 0,13$.... ec.

Essendo **0, 17=0, 170; 0, 13=0, 1300**..... ec. dunque *un fratto decimale non altera aggiungendo alla sua fine uno o più zeri.*

SOMMA E SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI DECIMALI.

42. Per sommare i decimali, si scrivono uno sotto l'altro; coll' avvertenza però che le parti omogenee rimangano nella stessa colonna verticale; cioè a dire si situano gl'interi in corrispondenza fra loro (§. 3), le decime sotto le decime, le centesime sotto le centesime ec.

Sommare 124, 126 : 152, 7 : 1743, 1 : 18, 0017; essendo 124, 126 = 124, 1260 : 152, 7 = 152, 7000 : 1743, 1 = 1743, 1000 : 18, 0017 = 18, 0017, dunque
124, 126 + 152, 7 + 1743, 1 + 18, 0017 = 124, 1260 + 152, 7000 + 1743, 1000 + 18, 0017 = $124.\frac{1260}{10000}$ + $152\,\frac{7000}{10000}+1743\,\frac{1000}{10000}+18\,\frac{17}{10000}$; per eseguire questa somma bisogna sommare prima le frazioni, e dopo gl'interi.

E siccome queste frazioni hanno lo stesso denominatore, per sommarle, conviene sommare i numeratori, e scriverci il denominatore stesso 10000: ciò equivale a questa regola

124,126	. . . . =	124,1260
152,7	. . . . =	152,7000
1743,1	. . . . =	1743,1000
18,0017	. . . . =	18,0017
		2037,9277

Somma che si sarebbe ottenuta egualmente, prescindendo dagli zeri che si sono aggiunti alla fine de' decimali, per ridurli tutti a parti diecimillesime.

43. *Per sottrarre i decimali, si situano l'uno sotto l'altro, come nel (§. 42), e quindi si esegua la sottrazione come se fossero interi, ciò che ne risulta sarà il residuo.*

Togliere da 1742,08456, 179,171.

Si avrà.

1742,08456 — 179,171 =
1742,08456 — 179,17100, cioè

	1742,08456
	179,17100
Residuo	1562,91356

Il quale si otteneva egualmente eseguendo la sottrazione, e togliendo dopo il 171 i due zeri. Cioè scrivendo

1742,08456
179,171
1562,91356

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE DELLE FRAZIONI DECIMALI.

44. *I decimali si moltiplicano fra di loro come i numeri interi, cioè a dire senza tener conto delle virgole che sono nei due fattori, indi dal prodotto si staccano tante cifre decimali da destra verso sinistra, quanta è la somma delle cifre decimali di ambo i fattori.*

Moltiplicare 13,7 per 121,32.

Essendo (§. 38) $13,7=\frac{137}{10}$, e $121,32=\frac{12132}{100}$; onde

$13,7\times121,32=\frac{137}{10}\times\frac{12132}{100}=\frac{137\times12132}{10\times100}=\frac{137\times12132}{1000}$; questo prodotto equivale a dimostrare la regola enunciata: perciocchè il prodotto 137×12132 è lo stesso del prodotto di $13,7\times121,32$, senza tener conto delle virgole; dal risultamento conviene prenderne la millesima parte, cioè a dire staccare da esso prodotto tre cifre decimali, da destra a sinistra; il numero 3 delle cifre decimali è precisamente la somma delle cifre decimali d'ambo i fattori: perciò.

$$\begin{array}{lr}
 & 121,3\,2 \\
 & 1\,3,7 \\
\hline
 & 84\,9\,2\,4 \\
 & 363\,9\,6 \\
 & 1213\,2 \\
\hline
\textit{Prodotto}\ldots\ldots\ldots & 1662,0\,8\,4
\end{array}$$

45. *I decimali si dividono come gl' interi; indi si staccano nel quoziente, da destra a sinistra, tante cifre decimali, per quante sono le cifre decimali del dividendo, meno quelle del divisore.* Per ciò dimostrare, si voglia dividere 124,4875 per 13,7.

Si avrà

$$124,4875 : 13,7 =$$

$$\frac{1244875}{10000} : \frac{137}{10} =$$

$$\frac{1244875}{10000}\times\frac{10}{137} =$$

$$\frac{1244875\times10}{10000\times137}=\frac{1244875}{137}\times\frac{1}{1000}.$$

Questo risultamento indica che il dividendo **124,4875** debba considerarsi senza virgola, cioè **1244875**, indi dividerlo pel divisore **13, 7** anche considerato senza virgola, cioè **137**, ed il quoziente bisogna moltiplicare per $\frac{1}{1000}$ ossia dividerlo per **1000**; vale a dire, staccare da destra a sinistra dal quoziente, tre cifre decimali. Con ciò resta dimostrata la regola enunciata, e quindi

	9,086	*Quoziente*
Divisore.... 13,7	124,4 875	*Dividendo*
	123 3	
	1 1 87	
	1 0 96	
	915	
	822	
	93	*Residuo*

Si noti che il residuo esprime **0, 0093**, perciocchè la parte decimale del dividendo indica le diecimillesime.

46. Se le cifre decimali del dividendo fossero minori di quelle del divisore, si aggiungerebbero alla fine delle cifre decimali di esso dividendo, tanti zeri da far sì che questi uniti con le dette cifre decimali eguagliassero le cifre decimali del divisore; in tal caso dal quoziente non si dovrà staccare alcuna cifra decimale. Progredendo poi, aggiugnere un altro zero al dividendo, dal quoziente dovrà staccarsi l'ultima cifra (§. **45**); se si aggiungano due altri zeri, dal quoziente si dovranno staccare due cifre, e così proseguendo. *Per esempio*, siano **5** le cifre decimali del divisore, e **3** quelle del dividendo, nel quoziente si vogliano le parti millesime, per cui il numero delle cifre decimali del dividendo dovrà essere eguale al numero di quelle del divisore più tre, ossia otto; ma quelle del dividendo sono tre, dunque alla fine di queste tre converrà aggiungere **5** zeri. Così pure se il divisore contenesse **7** cifre, ed il dividendo **4** cifre, e si volesse approssimare la divisione fino a centesimi, i zeri da aggiungere al dividendo dovrebbero essere al numero di **5**. *Esempio*. Trovare il quoziente di **1175, 3 : 13, 122**, fino a parti centesime; ne risulta che il dividendo si ridurrà ad essere **1175, 30000**.

Dividere **175** per **18**, fino a diecimillesimi; il dividendo dovrà scriversi nella divisione **175, 0000**.

Dividere 7 per 0, 974, fino a millesimi; il dividendo dovrà scriversi 7, 000000. Senza notare altri esempi, avendo presente il precetto del (§. 45), si potrà in tutti i casi approssimare il quoziente fino a quelle parti decimali che si vorrà; ciò non ostante, se si trattasse di dividere 0,0007 per 12,129, si comprende benissimo che il quoziente non potrà contenere le parti decimali che si vogliono. Infatti per poter cominciare la divisione, il dividendo dovrà scriversi 0,00070000, onde eseguire al solito la divisione; ed in questo caso il quoziente conterrà le parti centomillesime in poi, cioè a dire non potrà contenere nè le decime, nè le centesime, nè le millesime, nè le diecimillesime; ossia volendosi le approssimazioni al quoziente, queste non potranno essere che parti centomillesime, milionesime, diecimilionesime ec.

RIDURRE UNA FRAZIONE ORDINARIA AD UNA FRAZIONE DECIMALE.

47. *Per ridurre una frazione ordinaria a frazione decimale, dovrà eseguirsi una divisione, che abbia per divisore il denominatore, e per dividendo il numeratore; se il decimale si vuò approssimare a parti decime; centesime ec. alla destra del dividendo si aggiungano uno, due, ec. zeri; e si esegua al modo ordinario la divisione.*

Ridurre $\frac{5}{7}$ a decimale, fino a parti millesime. Sarà

$$\frac{5}{7}=\frac{5{,}000}{7}\text{; cioè}$$

$$\begin{array}{r|r} 7 & 0{,}714 \\ \hline & 5{,}000 \\ & 49 \\ \hline & 10 \\ & 7 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 2 \end{array}$$

Per cui $\frac{5}{7}=0{,}714$ . . . .

Ridurre $\frac{3}{127}$ a decimale, fino a parti centesime. Sarà

$$\frac{3}{127}=\frac{3,00}{127};\text{ cioè}$$

$$\begin{array}{r|l} & 0,02 \\ 127 & \overline{3,00} \\ & \underline{2\ 54} \\ & 46 \end{array}$$

Quest' esempio fa conoscere che le parti decimali che si pretendono, possono essere dalle centesime in poi; cioè a dire il $\frac{3}{127}$ non potrà contenere le decime, ma bensì dalle centesime in poi.

Così pure $\frac{2}{1731}$ potrà ridursi a decimale, beninteso però che sarà significativo dalle parti millesime; infatti

$$\frac{2}{1731}=\frac{2,0}{1731}=\frac{2,00}{1731}=\frac{2,000}{1731},$$

da quest' ultimo fratto in poi potrà aver luogo la divisione.

48. Ridurre $\frac{3}{5}$ a decimale; sarà

$$\frac{3}{5}=\frac{3,0}{5}=0,6:\text{ così }\frac{13}{25}=\frac{13,00}{25}=0,52.$$

Questi due esempî fanno conoscere che un fratto ordinario ridotto in fratto decimale, potrà eguagliarlo; o per meglio dire, *quando il denominatore di un fratto si contiene esattamente, in dieci, o in cento, o in mille ec. la divisione avrà un termine; ed il fratto sarà in conseguenza esattamente eguale al fratto decimale.* Ne segue pure che i fratti ordinarî possono ridursi a fratti decimali, senza che tutti dessero termine alla divisione; fra questi $\frac{7}{22}$ ne porge un esempio.

FRATTI PERIODICI.

49. Applicando i precetti della scorsa teoria ai seguenti fratti, si hanno questi risultamenti che progrediscono all'infinito.

$$\frac{1}{9}=0{,}11111\ldots\ \frac{2}{9}=0{,}22222\ \ldots\ \frac{3}{9}=0{,}33333\ \ldots\ldots$$

$$\frac{8}{9}=0{,}88888\ldots\ \frac{1}{99}=0{,}010101\ldots\ \frac{2}{99}=0{,}020202\ldots\ldots$$

$$\frac{3}{99}=0{,}030303\ldots\ \frac{97}{99}=0{,}979797\ldots\ \frac{98}{99}=0{,}989898\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{999}=0{,}001001\ldots\ \frac{75}{999}=0{,}075075\ldots\ \frac{894}{999}=0{,}894894\ldots\ldots$$

e così seguitando.

Da ciò si ritrae che *le frazioni che hanno per denominatore 9,99,999,9999, ec; ridotte a frazioni decimali, quantunque la divisione non abbia mai termine, pure le cifre decimali si riproducono continuamente;* cioè a dire esse frazioni danno luogo alle frazioni decimali dette *periodiche*.

In conseguenza dell'esposto, tutte le frazioni, i cui denominatori si contengono esattamente in 9, in 99, in 999 ec. ridotte a frazioni decimali debbano dare il periodo.

Esempi $\frac{1}{3}=\frac{1\times3}{3\times3}=\frac{3}{9}$

$$\frac{7}{13}=\frac{7\times76923}{13\times76923}=\frac{538461}{999999}$$

$$\frac{15}{33}=\frac{15\times3}{33\times3}=\frac{45}{99}$$

50. Possiamo dal paragrafo antecedente stabilire che *un decimale periodico è eguale ad un fratto ordinario che abbia per numeratore le cifre del periodo, e per denominatore tanti 9 per quante sono queste cifre.*

Esempi $0{,}171717\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{17}{99}$

$$0{,}031031\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{31}{999}$$

$$0{,}124124\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{124}{999}.$$

51. Se il fratto periodico fosse *misto*, come per esempio 0,54444....., e si volesse in fratto ordinario, si opererebbe come segue

$$0{,}54444\ldots\ldots=\frac{10}{10}\times0{,}54444\ldots=$$

$$\frac{1}{10}\times5{,}4444\ldots\ldots=\frac{1}{10}\times5\frac{4}{9}=\frac{1}{10}\times\frac{49}{9}=\frac{49}{90};$$

perciò $$0{,}54444\ldots\ldots\ldots=\frac{49}{90}.$$

Esempi

$$0{,}71454545\ldots\ldots=\frac{100}{100}\times0{,}71454545\ldots\ldots=\frac{1}{100}\times$$

$$71{,}454545\ldots=\frac{1}{100}\times71\frac{45}{99}=\frac{1}{100}\times\frac{7074}{99}=\frac{7074}{9900}=\frac{786}{1100}=\frac{393}{500}.$$

Dunque $$0{,}71454545\ldots\ldots=\frac{393}{500}.$$

Questi due esempî bastano a stabilire il modo come ridurre un fratto decimale *periodicomisto* a fratto ordinario.

52. È da notare che avendosi un fratto decimale da valutarsi, possiamo avvalerci di quel numero di cifre che si richieggono per la esattezza più o meno grande della operazione.

Così del decimale 0,1762 le approssimazioni si vogliano fino alle millesime, supponendo che non si voglia l'approssimazione delle diecimillesime, perchè creduta troppo piccola negli usi; allora la cifra ultima 2 non si scrive, e si valuta solamente 0,176. Se poi l'approssimazione si vuole fino alle centesime, converrà far uso di 0,17 anzichè di 0,176: ma per avere un'approssimazione maggiore converrà far uso di 0,18; perciocchè 0,17 è minore di 0,176 per 0,006; qualora 0,18 è maggiore di 0,176 per 0,004. Dunque bisogna servirsi del 0,18, perchè l'errore in più è 0,004, e non già di 0,17 perchè l'errore in meno è 0,006 maggiore. Si può quindi stabilire la regola, che *per avvalersi di un numero di cifre decimali convenienti, bisogna fare attenzione alla prima delle cifre che comincia a trascurarsi: se questa non è minore di 5, si dovrà aumentare di un'unità la cifra antecedente, cioè l'ultima di quelle delle quali si vuò tener conto: quando poi l'ultima cifra da trascurarsi è minore di 5, l'ultima da valutarsi, ossia l'antecedente, non dovrà ricevere alcuna alterazione.*

Esempi 0, 14789 = 0 , 1479 circa
0, 1342 = 0 , 134 circa
0, 19 = 0 , 2 circa

Quello però da riflettere si è, che *a misura che cresce il numero delle cifre decimali, maggiori approssimazioni si ottengono nelle regole.*

MISURA METRICA FRANCESE.

Misura di lunghezza. Il quarto del Meridiano terrestre fu trovato di piedi parigini 30784440 ; la diecimilionesima parte di questa lunghezza, cioè piedi 3, 0784440 = 3 piedi , 0 pollici , 11 linee , e 0,296 di linea si è chiamata *metro* , il quale serve per le misure lineari , ossia di lunghezza. Il metro si divide in dieci parti eguali , ciascuna delle quali dicesi *decimetro.* Si divide in cento parti eguali ciascuna delle quali si dice *centimetro.* Si divide in mille parti eguali ciascuna delle quali dicesi *millimetro* ec. La lunghezza di dieci metri , si dice *decametro* ; quella di cento metri dicesi *ectometro* ; quella di mille metri *kilometro*; quella di diecimila metri *miriametro.*

Misura delle superficie. L'unità di misura delle superficie è il quadrato descritto su di un metro, ossia un metro quadrato. Il metro quadrato è composto di 100 decimetri quadrati ; di 10000 centimetri quadrati , di 1000000 di millimetri quadrati ec. Così 3^{mq}, 2637 esprime 3 metri quadrati , 26 decimetri quadrati , e 37 centimetri quadrati.

Misura Agraria. L'unità di superficie pe' terreni è il quadrato fatto sulla lunghezza di 10 metri , cioè il decametro quadrato , detto *Aro* ; il quale contiene , com'è chiaro, 100 metri quadrati ; in tal caso il metro quadrato dicesi *centiaro.*

Misura di volume. L'unità di volume è il metro cubo , cioè il cubo descritto su di un metro.

Il metro cubo è composto di 1000 decimetri cubici ; di 1000000 , di centimetri cubici : ec.

Così 7^{mc},273454 ; significa 7 metri cubici ; 273 decimetri cubici 454 centimetri cubici ec. Così pure 9^{mc},97 significa 9 metri cubici , e 97 centesimi di metro cubo; ma 9^{mc}, 97 = 9^{mc}, 970, cioè 9 metri cubici , e 970 decimetri cubici.

Quando il metro cubo serve a misurare le legna da bruciare , prende il nome di *Stero.*

Misura di capacità. Per misurare i liquidi si è scelto la capacità di un cubo descritto su di un decimetro , quale capacità dicesi *Litro.*

Misura di peso. Il peso di un centimetro cubo di acqua distillata al massimo della condensazione si è chiamato *grammo;* mille grammi formano il *kilogrammo*, che equivale al peso di 1000 centimetri cubici di acqua distillata, ossia al peso di un decimetro cubo della medesima acqua.

Monete. L'unità monetaria è il *franco,* il quale pesa 5 grammi, dei quali $\frac{9}{10}$ parti sono di argento fino, ed $\frac{1}{10}$ parte di lega.

Le monete d'oro sono di 20 franchi, e di 40 franchi. Il rapporto del valore dell'oro all'argento, a peso eguale, è di 31 : 2.

A tutte le esposte misure in generale aggiungendo le parole *deca*, *ecto*, *kilo*, *miria*, si formano i moltiplici; ed aggiungendovi le parole *deci*, *centi*, *milli*, ec., si formano i summoltiplici. La tavola seguente dimostra la misura metrica in generale.

QUADRO GENERALE

DEL SISTEMA METRICO DECIMALE

NOMI SISTEMATICI.	VALORI.
MISURA DI LUNGHEZZA.	
Miriametro.	Diecimila metri.
Kilometro	Mille metri.
Ectometro	Cento metri
Decemetro	Dieci metri.
Metro	*Unità fondamentale de' pesi e delle misure — Diecimilionesima parte del 4.° del meridiano terrestre . . . .*
Decimetro	Decimo del metro.
Centimetro	Centesimo del metro.
Millimetro	Millesimo del metro.
MISURE AGRARIE.	
Ettaro	Cento ari, o,10000 metri quadrati.
Aro	Cento metri quadrati, quadrato di 10 metri di lato
Centiaro	Centesimo dell'aro, o metro quadrato
MISURE DI CAPACITA' PE' LIQUIDI, E PER GLI ARIDI.	
Kilolitro	Mille litri.
Ettolitro	Cento litri.
Decalitro	Dieci litri.
Litro	Decimetro cubo.
Decilitro	Decimo del cubo.
MISURE DI SOLIDITA'	
Decastero	Dieci steri.
Stero	Metro cubo.
Decistero	Decimo dello stero.
PESI.	
. . . .	*Mille kilogrammi peso del metro cubo d' acqua distillata, e della tonnellata di mare.*
. . . .	*Cento kilogrammi quintale metrico*
Kilogrammo	*Mille grammi, peso nel vuoto di un centimetro cubo d' acqua distillata alla temperatura di 4 gradi del termometro centigrado. . . .*
Ettogrammo	Cento grammi.
Decagrammo	Dieci grammi.
Grammo	Peso di un centimetro cubo d'acqua a 4.° centigradi.
Decigrammo	Decimo del grammo.
Centigrammo	Centesimo del grammo.
Milligrammo	Millesimo del grammo.
MONETE.	
Franco	Cinque grammi d'argento al titolo di $\frac{9}{10}$ di fino.
Decimo	Decimo del franco.
Centesimo	Centesimo del franco.

PARTE SECONDA.

ALGEBRA.

53. *L'Algebra è una specie di aritmetica universale.*
Siccome l'aritmetica si serve de' numeri pei calcoli corrispondenti, così l'algebra fa uso delle lettere dell'alfabeto nelle sue operazioni. Nella prima le cifre hanno un valore determinato, così 12 può significare egualmente 12 canne, 12 ducati ec. ma non può significare 100 o pure 1000: onde le cifre aritmetiche non sono segni così generali da rappresentare tutte le quantità possibili: perciò si pensò ad altri segni il cui valore non fissato, potesse variare ad arbitrio. Questi segni come abbiamo accennato sono le lettere dell'alfabeto.

54. Si chiama dunque *espressione algebrica* tutto ciò ch'è notato con lettere, e si rappresentano con certi altri segni le diverse operazioni che possono farsi su queste espressioni: così per sommare a con b si scrive $a+b$, e si pronunzia *a più b*; il segno $+$ è il segno della somma: per sottrarre b da a si scrive $a-b$ e si dice *a meno b*; il segno $-$ è il segno della sottrazione; per esprimere *a eguale b* si scrive $a=b$, il segno $=$ è dunque il segno della eguaglianza; per indicare a maggiore di b si scrive $a>b$, per indicare a minore di b si nota $a<b$.

La moltiplicazione di a per b s'indica per $a \times b$, o con $a.b$: o pure ab per più semplicità: e viceversa $ab = a \times b$: così pure $abc = ab \times c = a \times b \times c = a.b.c$. La divisione di a per b si accenna con $\frac{a}{b}$ o pure $a:b$.

55. Si chiama *termine*, o *monomio* ogni quantità non unita ad altra con i segni $+$, $-$. Si chiama *binomio* una espressione di due termini come per esempio $a+b$, $a-c$, $abc-ab$. Il *trinomio* costa di tre termini, come $a+b-c$, $ab-cd+m$, così inseguito: il *polinomio* costa di 4,5,6 ec. termini.

56. Un termine preceduto dal segno $+$ si dice *positivo*, e preceduto dal segno $-$ si dice *negativo*, con che si indica che l'uno è opposto all'altro nel modo di esistere: così se un credito si nota col $+$, un debito dovrà notarsi col $-$; se una retta che da un punto va a destra o all'insù, si esprime col $+$; un'altra che dal punto stesso vada a sinistra o all'ingiù, dovrà esprimersi col $-$. Or poichè un debito si annulla con un egual credito, lo zero sta in mezzo tra i termini positivi e negativi: ed un termine si dirà positivo o negativo se sarà maggiore o minore di zero. Del resto quando il primo termine di un polinomio non ha segno, si ha per positivo.

57. Spesso occorrono i termini stessi in un polinomio, come $a+a+a-b-b+c$: allora si scrivono una sola volta, segnando con una cifra a sinistra quante volte debbonsi ripetere. Quindi $a+a+a-b-b+c = 3a-2b+c$, e la cifra 3, e l'altra 2 che precedono i termini, si chiamano *coefficienti*: se esse manchino il coefficiente è 1 così la lettera d è una espressione compendiosa di $1.d$, ed $fh-pq = 1.fh-1.pq$.

Si può dire dunque, che il coefficiente è quel numero che si situa avanti di un termine per indicare quante volte questo termine è preso.

$4ab$, significa $2ab+2ab$, o pure $ab+ab+ab+ab$, o infine $3ab+ab$: $-3pq$, indica $-pq-pq-pq$, ossia $-2pq-pq$.

58. Una quantità moltiplicata per se stessa si scrive una volta soltanto: così $a \times a = aa = a^2$: $a \times a \times a = a.a.a = a^3$: i numeri 2 e 3 si nominano *esponenti* i quali esprimono quante volte una quantità è stata moltiplicata per se stessa meno uno. Ossia a^2 significa che a è stata moltiplicata una volta per se stessa: a^3 è lo stesso che dire che a è stata moltiplicata due volte in se stessa.

Il coefficiente è ben diverso dall' esponente: il primo esprime somma il secondo moltiplicazione.

Nel 1.° caso dà $a+a+a=3a$, e nell' altro dà $a\times a\times a=a^3$: se a fosse eguale a 5, $3a$ vuol dire $3\times5=15$, e a^3 equivale a $5\times5\times5=125$.

Se l' esponente manchi, egli è l' unità; così $ab=a^1b^1$; $aabbc=a^2b^2c$.

59. I termini si dicono *simili* quandò contengono le stesse lettere con eguali esponenti: così $2a^2$ è simile a $-7a^2$: $-12a^4$ è simile a $\frac{1}{2}a^4$, ec.

Nell' algebra sono frequentissime le riduzioni: le quali però hanno luogo pe' termini simili: per esempio $3a^2b-\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}a^2b+2ab=\frac{11}{3}a^2b+\frac{3}{2}ab$ così pure $ab+a^2b^2-4ab=a^2b^2-3ab$. $7a^2b-5a^2b=2a^2b$, $7a^2b+5a^2b=12a^2b$; $7a^2b-7a^2b=0$, $-7a^2b-5a^2b=-12a^2b$.

Cioè quando due termini sono simili e hanno lo stesso segno se ne forma un sol termine che abbia il segno comune, e per coefficiente la somma de' coefficienti parziali: se il segno de' termini simili è diverso, si scrive quello del termine che ha il coefficiente maggiore, e quindi si prenda la differenza di tali coefficienti.

Esempio $2a^2b+3a^2-2a^2b+3a-5a^2-ab=-2a^2+2a$,

SOMMA.

60. *Per sommare le quantità basta scrivere una dopo l' altra coi segni loro, e farne la riduzione se evvi luogo:* così la somma di abc e def è $abc+def$; quella di $ab+a^3$ ed $m-n-z^4$ è $ab+a^3+m-n-z^4$: quella di $3a^2b+ab$ e $7a^2b-20ab$ è $3a^2b+ab+7a^2b-20ab=10a^2b-19ab$: infine quella di $2a^3+4b^2c$ e $-2a^3-4b^2$ è $2a^3+4b^2-2a^3-4b^2=o$.

SOTTRAZIONE.

61. *Una quantità si sottrae dall' altra scrivendola dopo di questa mutando i segni.*

Così da $7a^2$ tolto $+4b^4$ si deve scrivere $7a^2-4b^4$: infatti se questa è la differenza delle quantità date, unita con quella

che si è sottratta, deve dare la prima; o sia (§. 60) $7a^2-4b^4+4b^4=7a^2$.

Togliendo da $5ab$; $-3mn$ dico che rimane $5ab+3mn$: se ciò è vero questo residuo unito con $-3mn$ (§. 60) deve dare $5ab$: infatti $5ab+3mn-3mn=5ab$: cioè nella sottrazione i segni positivi, appartenenti alla quantità che si sottrae diventano negativi e viceversa.

Così da $7a^2b+5abc$ sottratto $5a^2b-4abc-d$, rimane $7a^2b+5abc-5a^2b+4abc-d=2a^2b+9abc-d$.

MOLTIPLICAZIONE.

62. Ogni termine algebrico è composto di quattro parti.

1.° il segno; 2.° il coefficiente; 3.° la lettera; 4.° l'esponente.

Una quantità positiva moltiplicata per una quantità positiva dà un prodotto positivo. Infatti $+a\times+b$ il prodotto dovrà essere positivo, perciocchè $+a$ si deve replicare tante volte per quante sono le unità comprese in b, per esempio se $b=3$, sarà

$$+a\times+b=+a\times+3=+a+a+a=+3a,$$

o generalmente $=+ab$.

Una quantità negativa moltiplicata per una quantità positiva dà un prodotto negativo.

Poichè $(a-a)b=0\times b=0$.

Cioè la quantità b moltiplicata per zero dà zero; ma $(a-a)\times b$, dà per primo termine ab, ed affinchè questo resti distrutto conviene che $-a\times+b$ sia eguale a $-ab$: onde il prodotto di $+a$ per $-b$ dà $-ab$.

Similmente $(a-a)\times-b=o$; ma $+a\times-b=-ab$, e perchè questo resti distrutto conviene che $-a\times-b$ dia ab.

Generalmente si può stabilire che *i segni stessi moltiplicati fra loro danno un segno positivo, ed i segni contrari danno un negativo*: ossia

$$+1\times+1=+1;-1\times-1=+1, \text{ e } +1\times-1=-1.$$

63. Pei coefficienti, si segue la regola della moltiplicazione come nell'aritmetica: il prodotto sarà il coefficiente del prodotto; così $3a\times9b=27ab$.

64. In riguardo alle lettere si scrivono una dopo l'altra come si è detto di sopra: così $10ab\times3cd=30abcd$.

65. In quanto agli esponenti si sommano alloraquando appartengono alla stessa lettera.

Così $\qquad 2a^2b\times 3a^3b^2=6a^5b^3.$

Infatti $2a^2b\times 3a^3b^2=2aab\times 3aaabb=6aaaaabbb=6a^5b^3$ (§. 58).

Esempi $\qquad -5a^{\frac{2}{3}}bc\times 3ab^{\frac{1}{2}}c^3=-15a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{2}}c^4$

$$\frac{2}{3}a^4bc\times\frac{1}{4}a^5b^4c^3=+\frac{1}{6}a^9b^5c^4$$

66. *La moltiplicazione de' polinomi si fa moltiplicando ciascun termine di un fattore per ciascun termine dell'altro, e poi riducendo se si può.*

Debba moltiplicarsi a^2+3c-d per $2a^2+d$, moltiplico primieramente a^2 per $2a^2$ (il prodotto è $2a^4$) indi $3c$ per $2a^2$ $(=6a^2c)$: poi $-d$ per $2a^2$ $(=-2a^2d.)$. Passando al secondo termine $+d$ del moltiplicatore, e moltiplico $+d$ per a^2 $(=a^2d)$; poi $+3c$ per $+d(=3cd)$; infine $+d$ per $-d$ $(=-d^2)$. Esponendo la regola si ha

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & a^2 & +3c & -d. & & \\
 & 2a^2 & +d & & & \\
\hline
 & 2a^4 & +6a^2c & -2a^2d. & & \\
 & & & +a^2d & +3cd & -d^2 \\
\hline
\textit{Somma ridotta} \ldots\ldots & 2a^4 & +6a^2c & -a^2d & +3cd & -d^2
\end{array}$$

Ecco degli altri esempî

$$\begin{array}{llllll}
 & 2a^{\frac{1}{2}}b & -3a^2b^2 & +b^3 & & \\
 & & a^2b^2 & -a^{\frac{1}{2}}b & & \\
\hline
 & 2a^{\frac{5}{2}}b^3 & -3a^4b^4 & +a^2b^5 & & \\
 & & & & -2ab^2 & \\
+ & 3a^{\frac{5}{2}}b^3 & & & & \\
 & & & & & -a^{\frac{1}{2}}b^4 \\
\hline
 & 5a^{\frac{5}{2}}b^3 & -3a^4b^4 & +a^2b^5 & -2ab^2 & -a^{\frac{1}{2}}b^4.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{2}a^2b - 2ab + b^3 \\
\qquad \frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{4}ab \\
\hline
\frac{1}{4}a^4b^2 - a^3b^2 + \frac{1}{2}a^2b^4 \\
\qquad + \frac{1}{8}a^3b^2 \qquad\qquad - \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{4}ab^4 \\
\hline
\frac{1}{4}a^4b^2 - \frac{7}{8}a^3b^2 + \frac{1}{2}a^2b^4 - \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{4}ab^4
\end{array}
$$

67. Talvolta la moltiplicazione s'indica solamente, e si covrono i fattori con una linea, o si chiudono tra parentesi: così il prodotto di $a+3d-d^2$ per b^2-6d^2 si scrive $\overline{a+3d-d^2}\times\overline{b^2-6d^2}$, ovvero $(a+3d-d^2)(b^2-6d^2)$. Quando i fattori sono molti, come $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, ed occorre effettuare l'operazione, si moltiplicano i primi due, poi il lor prodotto pel terzo, e così di seguito.

DIVISIONE.

68. *Nella divisione algebrica, si divide, come dichiareremo, sempre un monomio per un altro monomio.*

In quanto ai segni *se i due monomî hanno lo stesso segno, quello del quoziente sarà positivo: se poi hanno segno diverso il quoziente dovrà portare il segno negativo.*

Infatti $+a$ diviso per $+b$ dico che il quoziente sarà positivo. Se si nega sia il quoziente negativo ed espresso da $-c$: avremo perciò $\frac{+a}{+b}=-c$: ma il dividendo è eguale al divisore moltiplicato pel quoziente dunque $+a=-bc$: cioè una quantità positiva eguale ad un'altra negativa, ciò è un assurdo; dunque il segno del quoziente dovrà essere positivo.

Inoltre $-a$ diviso per $-b$ deve il quoziente essere positivo, se non sia tale, sia negativo, ed espresso per $-c$: sarà come sopra $-a=-b\times-c=+bc$ la qual cosa è anche un assurdo, perciò ec.

Da ultimo $-a$ diviso per $+b$ il quoziente dovrà essere negativo, sia se si nega positivo espresso da $+c$: dovrà essere $-a=+b\times+c=+bc$ un altro assurdo: in conseguenza resta dimostrato ciò che si è annunziato.

69. I coefficienti seguono la stessa regola che si è indicata ne' numeri: perciocchè quando si è formato il dividendo, se gli è dato per coefficiente il prodotto del coefficiente del divisore per quello del quoziente.

70. Nel quoziente si notino le lettere che sono nel dividendo e non già nel divisore. Perchè considerando il dividendo come il prodotto del quoziente pel divisore, così volendo il quoziente conviene ch'esso contenga le lettere che sono nel dividendo e non già quelle che sono nel divisore.

Se poi vi sono lettere appartenenti al dividendo ed al divisore queste non si scrivono nel quoziente.

Se in fine nel divisore vi sono lettere che non sono nel dividendo, si scrivono nel quoto sotto quelle di già notate, ma framezzate da una retta.

71. Gli esponenti si sottraggono: vale a dire se una lettera è comune al dividendo ed al divisore si scrive nel quoziente, e per esponente gli si dà la differenza degli esponenti suddetti. Percui se dall'esponente del dividendo si toglie quello del divisore, la differenza sarà l'esponente del quoziente.

Tutte queste ragioni sono fondate sul principio che il dividendo pareggia il divisore moltiplicato pel quoziente.

72. Dividere $-32a^4b^3cd$ per $8a^3bc$: il quoziente indicato è $\frac{-32a^4b^3cd}{8a^3bc}$: il quoziente ridotto ed eseguito è $-4ab^2d$.

Dividasi -32 per $+8$ il quoto è -4; per la regola degli esponenti, $4-3=1$ esponente di a; che non si scrive perchè sottinteso; $3-1=2$ esponente di b: $1-1=0$ per esponente di c, ossia c non si scrive; ed il d si scrive nel quoziente come si trova nel dividendo, perchè manca nel divisore.

73. Essendo $\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0$; ma $\frac{a^m}{a^m}=1$: onde $a^0=1$, vale a dire *ogni quantità elevata all'esponente zero pareggia l'unità.*

Poichè $\frac{a^m}{a^{m+n}}=a^{m-m-n}=a^{-n}$; ma $\frac{a^m}{a^{m+n}}=$

$$\frac{\frac{a^m}{a^m}}{\frac{a^{m+n}}{a^m}}=\frac{1}{a^n}$$: sarà $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$: ciò indica che *ogni quantità*

elevata all' esponente negativo pareggia l' unità divisa per la stessa quantità ma con l' esponente positivo.

Esempî

$$\frac{a^m b c^3}{a^m b^3 c} = a^{m-m} b^{1-3} c^{3-1} = a^0 . b^{-2} c^2 = 1 \times \frac{1}{b^2} \times c^2 = \frac{c^2}{b^2} :$$

$$\frac{a^m b^n c^p}{a^m b^n c^p} = a^{m-m} b^{n-n} c^{p-p} = a^0 \times b^0 \times c^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

$$\frac{a^5 b^4 c^3 d}{a^4 b^5 c^2 d^3} = \frac{ac}{bd^2} .$$

74. *Un polinomio dicesi* ordinato *per una data lettera alloraquando il primo termine contenga la detta lettera elevata al massimo esponente, nel secondo termine contenga la lettera stessa elevata all' esponente immediato: e così proseguendo.*

Esempio

$$5a^2b^5c - 4a^3b^4 + 8a^5 + b^6c$$

ordinato rispetto ad a si scrive

$$8a^5 - 4a^3b^4 + 5a^2b^5c + b^6c$$

ordinato rispetto a b viene

$$b^6c - 4a^3b^4 + 5a^2b^5c + 8a^5 :$$

infine ordinato rispetto a c diventa

$$5a^2b^5c + b^6c - 4a^3b^4 + 8a^5.$$

75. *Allorchè si debba dividere un polinomio per un altro; conviene ordinare essi polinomî per la stessa lettera: poscia si divide il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, osservando la regola de' segni, de' coefficienti, delle lettere, e degli esponenti.*

Si moltiplica tutto il divisore pel quoziente, e questo prodotto si sottrae dal dividendo: cioè si scrive col segno cambiato (§.61) *ed indi si eseguano le riduzioni se hanno luogo. Il primo termine del residuo si divida di nuovo pel primo termine del divisore: e come si è fatto nella prima volta, così si replichi la operazione finchè la divisione non possa più eseguirsi.*

Esempi

Dividere a^2+b^2-2ab per $-b+a$: si ordinano ambidue per la lettera a, e quindi si scrive

$$\begin{array}{lll|l}
\textit{div}^o\ldots & a^2-2ab+b^2 & \textit{div}^e\ldots & a-b \\
 & -a^2+ab & & \overline{a-b}\ \textit{quoziente} \\
\hline
1.^o\ \textit{resto}.. & -ab+b^2 & & \\
 & +ab-b^2 & & \\
\hline
2.^o\ \textit{resto}.. & 0\ \ldots\ 0 & &
\end{array}$$

Si è diviso a^2 primo termine del dividendo per a primo termine del divisore: il quoziente è a: indi si è moltiplicato a pel divisore $a-b$ ed ha dato a^2-ab il quale sottratto dal dividendo $a^2-2ab+b^2$ si è scritto col segno cambiato cioè $-a^2+ab$: e si è col fatto eseguita la riduzione: il primo resto è $-ab+b^2$: poi il primo termine di questo residuo si è diviso per a ed ha dato nel quoziente $-b$, il quale moltiplicato pel divisore $a-b$ ha dato $-ab+b^2$: sottraendo questo, o scrivendolo col segno cambiato sotto $-ab+b^2$: rimane zero dopo le riduzioni. Si sarebbe potuto ordinare il dividendo ed il divisore per b, ed il quoziente sarebbe stato $-b+a$ ossia $a-b$.

Esempi

$$-3b^2cx^4-3b^2cx^3+b^2c^2x^2+9b^2x^5$$

diviso per $\quad +b^2cx-3b^2x^2$

ordinando per x viene

$$\begin{array}{l|l}
9b^2x^5-3b^2cx^4-3b^2cx^3+b^2c^2x^2 & -3b^2x^2+b^2cx \\
\cline{2-2}
-9b^2x^5+3b^2cx^4 & -3x^3+cx \\
\hline
0\quad 0\quad -3b^2cx^3+b^2c^2x^2 & \\
\ 3b^2cx^3-b^2c^2x^2 & \\
\hline
\ 0\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l}
 & a^3+m^3 & a+m \\
\cline{3-3}
 & -a^3-a^2m & a^2-am+m^2 \\
\cline{2-2}
1.^o\ \textit{resto}.. & -a^2m+m^3 & \\
 & +a^2m+am^2 & \\
\cline{2-2}
2.^o\ \textit{resto}.. & +am^2+m^3 & \\
 & -am^2-m^3 & \\
\cline{2-2}
 & 0\quad 0. &
\end{array}$$

Per divisare se siasi operato regolarmente si esegua la moltiplicazione del divisore pel quoziente, e si ha

$$\begin{array}{rrrr}
a^2 & -\,am & +\,m^2 & \\
 & a & +\,m & \\
\hline
a^3 & -\,a^2m & +\,am^2 & \\
 & +\,a^2m & -\,am^2 & +\,m^3 \\
\hline
a^3 & 0 & 0 & +\,m^3.
\end{array}$$

Dividere $1 - x^4$ per $1 - x$: si ha

$$\begin{array}{lrr|l}
 & -\,x^4 & +\,1 & -\,x + 1. \\
\cline{4-4}
 & +\,x^4 & -\,x^3 & x^3 + x^2 + x + 1. \\
\cline{2-3}
1.^\circ \textit{ resto..} & -\,x^3 & +\,1 & \\
 & +\,x^3 & -\,x^2 & \\
\cline{2-3}
2.^\circ \textit{ resto..} & -\,x^2 & +\,1 & \\
 & +\,x^2 & -\,x & \\
\cline{2-3}
3.^\circ \textit{ resto..} & -\,x & +\,1 & \\
 & +\,x & -\,1 & \\
\cline{2-3}
4.^\circ \textit{ resto..} & 0 & 0 &
\end{array}$$

Dividere 1 per $1 - x$: avremo

$$\begin{array}{lrr|l}
 & 1 & & 1 - x \\
\cline{4-4}
 & -\,1 & +\,x & 1 + x + x^2 + \text{ec}. \\
\cline{2-3}
1.^\circ \textit{ resto..} & +\,x & & \\
 & -\,x & +\,x^2 & \\
\cline{2-3}
2.^\circ \textit{ resto..} & x^2 & & \\
 & -\,x^2 & +\,x^3 & \\
\cline{2-3}
3.^\circ \textit{ resto..} & +\,x^3 & & \text{ec.}
\end{array}$$

qui la divisione va all' infinito.

Dividere $\frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}ab^2 - \frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{20}b^3$ per $\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2$:

$$\begin{array}{lrrrr|l}
 & \frac{2}{7}a^3 & -\,\frac{1}{6}a^2b & -\,\frac{9}{35}ab^2 & -\,\frac{3}{20}b^3 & \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2 \\
\cline{6-6}
 & -\,\frac{2}{7}a^3 & & +\,\frac{9}{35}ab^2 & & \frac{3}{7}a - \frac{1}{4}b \\
\cline{2-5}
1.^\circ \textit{ resto} & & -\,\frac{1}{6}a^2b & & -\,\frac{3}{20}b^3 & \\
 & & +\,\frac{1}{6}a^2b & & +\,\frac{3}{20}b^3 & \\
\cline{2-5}
2.^\circ \textit{ resto} & & 0 & & 0. &
\end{array}$$

È da notare che quando nel residuo l' esponente della lettera per la quale si è ordinato il dividendo risulta maggiore dell' esponente della stessa lettera per la quale si è ordinato il divisore, la divisione dovrà avere il suo termine per non incorrere in espressioni che procederebbero indefinitamente.

Così

$$
\begin{array}{lll|l}
 & 4a^6 - 3a^4b + ab^2 + a & & 2a^3 + b \\ \cline{4-4}
 & -4a^6 - 2a^3b & & 2a^3 - \frac{3}{2}ab - b \\ \cline{2-3}
1.^\circ\ \textit{resto} & -3a^4b - 2a^3b + ab^2 + a & & \\
 & +3a^4b \qquad + \frac{3}{2}ab^2 & & \\ \cline{2-3}
2.^\circ\ \textit{resto} & -2a^3b + \frac{5}{2}ab^2 + a & & \\
 & +2a^3b + b^2 & & \\ \cline{2-3}
3.^\circ\ \textit{resto} & \frac{5}{2}ab^2 + b^2 + a & &
\end{array}
$$

qui dovrà porsi termine alla divisione per non avere delle frazioni algebriche nel quoziente, e nel medesimo tempo non menar oltre la regola.

PROVA.

$$
\begin{array}{lll}
 & 2a^3 - \frac{3}{2}ab - b. & \\
 & 2a^3 + b & \\ \hline
 & 4a^6 - 3a^4b - 2a^3b & \\
 & \qquad + 2a^3b - \frac{3}{2}ab^2 - b^2 & \\ \hline
 & 4a^6 - 3a^4b & - \frac{3}{2}ab^2 - b^2 \\
+ \text{ il } 3.^\circ\ \textit{resto.} & & + \frac{5}{2}ab^2 + b^2 + a \\ \hline
\text{ch' è il dividendo.} & 4a^6 - 3a^4b & + ab^2 + a
\end{array}
$$

FRAZIONI.

76. Per indicare una frazione che abbia per numeratore a e per denominatore b, si scrive $\frac{a}{b}$.

Sappiamo che una frazione non cambia di valore, moltiplicando, o dividendo sì il numeratore, che il denominatore per una stessa quantità, (§. 20).

Così $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{ac^3}{bc^3}$; e $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}=\frac{\frac{a}{c^2}}{\frac{b}{c^2}}$ ec. come pure

$$\frac{abc^3}{ab^2c^2}=\frac{c}{b};\ \frac{a^2b}{ab^4}=\frac{a}{b^3};\ \frac{a^mb^n}{a^pb^q}=a^{m-p}b^{n-q};$$

e $\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}=\frac{1}{a-b}$, $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2-9b^2}=$

$$\frac{2a-3b}{2a+3b},$$

si è diviso sì il numeratore che il denominatore per $2a-3b$.

77. *Per ottenere gl' interi contenuti in una frazione, si pone per divisore il denominatore, e per dividendo il numeratore* (§. 24), *e poscia si esegua la divisione, seguendo i precetti dichiarati antecedentemente* (§. 68 e seguenti).

Esempi

Sia $\frac{4a^2-12ab+9b^2+3c}{2a-3b}$ da cui si vogliono cavare gl' interi, cioè monomi con esponenti interi e positivi: si operi come appresso

$$\begin{array}{l|l}
4a^2-12ab+9b^2+3c & 2a-3b \\
\underline{-4a^2+6ab} & \overline{2a-3b} \\
\underline{-6ab+9b^2+3c} & \\
\underline{+6ab-9b^2} & \\
+3c &
\end{array}$$

resto... $+3c$

quindi $\frac{4a^2-12ab+9b^2+3c}{2a-3b}=2a-3b+\frac{3c}{2a-3b}$.

78. Per ridurre un intero ed un fratto ad un sol fratto si moltiplica l'intero pel denominatore e si aggiunge al numeratore, e quindi scrivere sotto questa somma il denominatore del fratto. (§. 25)

Così $a+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b}{a}$; e $a^2-\frac{b}{c}=\frac{a^2c-b}{c}$.

Come pure

$$2a-3b+\frac{bc}{2a+3c}=\frac{(2a-3b)(2a+3b)+bc}{2a+3b}=$$
$$\frac{4a^2+6ab-6ab-9b^2+bc}{2a+3b}=\frac{3a^2-9b^2+bc}{2a+3b}.$$

79. *Per ridurre le frazioni* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$ *allo stesso denominatore si moltiplica ciascun numeratore de' fratti pel prodotto de' denominatori degli altri* (§. 26).

Così $\frac{a}{b}=\frac{adn}{bdn}$, $\frac{c}{d}=\frac{cbn}{bdn}$, e $\frac{m}{n}=\frac{mbd}{bdn}$:

in conseguenza se i dati fratti si debbano sommare si avrà

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{m}{n}=\frac{adn}{bdn}+\frac{cbn}{bdn}+\frac{mbd}{bdn}=\frac{adn+cbn+mbd}{bdn}.$$

Esempî

$$\frac{a^2}{a}+\frac{a}{c}-\frac{d^2}{bm^2}=\frac{a^3cm^2}{abcm^2}+\frac{a^2bm^2}{abcm^2}-\frac{bcd^2}{abcm^2}=$$
$$\frac{a^3cm^2+a^2bm^2-bcd^2}{abcm^2}:\ \frac{a}{b}+\frac{b}{bd}+\frac{bd}{a}=\frac{a^2bd+ab^2+b^3d^2}{ab^2d};$$
$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{2a-3c}{a-b}=\frac{(a-a)(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{(a+b)(2a-3c)}{(a-b)(a+b)}=$$
$$\frac{(a-b)(a-b)+(a+b)(2a-3b)}{(a-b)(a+b)}=$$
$$\frac{a^2-2ab+b^2+2a^2-3ac+2ab-3c}{a^2-b^2}=\frac{3a^2+b^2-3ac-3bc}{a^2-b^2}.$$

80. Alcune volte accade che il denominatore di una frazione è esatto divisore del denominatore dell' altra, e la regola generale per la riduzione allo stesso denominatore può abbreviarsi.

Siano le frazioni $\frac{c}{a-b}$, e $\frac{d^2}{a^2-b^2}$: siccome a^2-b^2 diviso per $a+b$ dà $a+b$: così moltiplicando il numeratore c, ed il denominatore $a-b$ per $a+b$ si avrà

$$\frac{c(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{ac+bc}{a^2-b^2}:\ \text{percui}\ \frac{c}{a-b}+\frac{d^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bc}{a^2-b^2}+\frac{d^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bc+d^2}{a^2-b^2}.$$

La somma e la sottrazione delle frazioni si esegue come fin' ora si è operato.

Così $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{c}{b}=\frac{abd+bcd+bcd}{bdf}$, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

$$a+\frac{b}{c}-b-\frac{m}{n}=\frac{ac+b}{c}-\frac{nb+m}{n}=\frac{acn+nb-bcn+cm}{cn}.$$

81. *Le frazioni algebriche si moltiplicano fra loro con moltiplicare fra loro i numeratori, e poi i denominatori; con questi due prodotti se ne faccia un fratto* (§. 34).

Esempi

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

$$\frac{a^2}{a-b}\times\frac{a+b}{a-b}=\frac{a^3+a^2b}{a^2-2ab+b^2}.$$

$$a^2b\times\frac{a+b}{m+n}=\frac{a^3b+a^2b^2}{m+n}.$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(a^2-\frac{b^2}{d}\right)=\frac{ac+b}{c}\times\frac{a^2d-b^2}{d}=\frac{a^3cd+a^2bd-a^2bc-b^3}{cd}.$$

82. *La divisione si esegue rivoltando il divisore, ed operando la moltiplicazione* (§. 36).

Esempi

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{a^2b}{c^2}:\frac{a}{c}=\frac{a^2b}{c^2}\times\frac{c}{a}=\frac{a^2bc}{ac^2}=abc.$$

$$\frac{a^2-b}{a+b}:\frac{a-b}{a^3+b}=\frac{a^2-b}{a+b}\times\frac{a^3+b}{a-b}=\frac{a^5-a^3b+a^2-b^2}{a^2-b^2}.$$

$$a^2b:\frac{c}{d}=\frac{a^2b}{1}\times\frac{d}{c}=\frac{a^2bd}{c}.$$

$$\frac{a}{b}:c-d=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c-d}=\frac{a}{ac-bd}.$$

$$a^2-\frac{b}{c}:b^2+\frac{m}{n}=\frac{a^2c-b}{c}:\frac{b^2n+m}{n}=\frac{a^2c-b}{c}\times$$

$$\frac{n}{b^2n+m}=\frac{a^2cn-bn}{b^2cn+cm}.$$

83. È da notare, per facilitazione della riduzione de' fratti, quanto segue

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

Cioè *il prodotto della somma di due grandezze per la loro differenza è eguale alla differenza de' quadrati.*

Così $(a^2-b^2)(a^2+b^2)=a^4-b^4$, $(a^3-b^3)(a^3+b^3)=a^6-b^6$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

Cioè *il quadrato di un binomio è eguale alla somma dei quadrati delle parti: più il doppio prodotto delle parti stesse.*

Così volendo ridurre il fratto

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b} \text{ si avrà } \frac{(a+b)^2}{a+b}=a+b$$

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b.$$

e così proseguendo.

EQUAZIONI DEL PRIMO GRADO.

84. *L'insieme di più quantità separate dal segno di eguaglianza è ciò che si chiama equazione.* Per distinzione, si dà il nome di *primo membro* all'unione delle quantità poste a sinistra del segno $=$, ed il nome di *secondo membro* alle altre quantità situate a destra di un tale segno.

I quesiti algebrici racchiudono nella loro enunciazione quantità *note,* e quantità *incognite*: le prime si esprimono con le lettere $a,b,c....$ ec., e le seconde con le lettere x,y e z.

Quando in una equazione si trova la incognita con esponente uno, la equazione dicesi del *primo grado*: se l'esponente è 2 l'equazione dicesi del *secondo grado,* e così proseguendo. Generalmente dunque *una equazione dicesi di quel grado al quale è elevata la incognita del massimo esponente*: così $dx+x=ax+b$ è una equazione del primo grado: $ax^3+b=ax^2-x$ è una equazione del terzo grado.

Risolvere una equazione vale trovare il valore della incognita: cioè alloraquando questa sta sola in un membro, positivamente, col coefficiente uno, col denominatore uno, e con l'esponente uno. In questa teoria dichiareremo il modo di risolvere l'equazione del primo grado ad una sola incognita.

Risolvere la equazione generale

$$\frac{a}{b}x+c-d=g.$$

Si aggiunge al primo ed al secondo membro $-c+d$; si avrà

$$\frac{a}{b}x=g-c+d$$

85. Cioè *volendo passare i termini da un membro nell'altro conviene scriverli in questo col segno cambiato: ossia i positivi diventano negativi, e viceversa.*

Moltiplicando l' equazione per b, si ha

$$ax=(g-c+d)b.$$

86. Val quanto dire *la incognita si libera dal denominatore con moltiplicare tutta la equazione per questo.*

Dividendo tutta la equazione per a si ricava

$$x=\frac{(g-c+d)b}{a}.$$

87. Ossia *per togliere il coefficiente alla incognita si divide tutta la equazione per questo coefficiente*

Sia l' equazione

$$-ax+ab=a+b-a^3$$

Si moltiplica sì il primo che il secondo membro per -1 si avrà $\quad ax-ab=a^3-a-b.$

88. Val quanto dire che *se si cambiano i segni a tutti i termini di una equazione ne risulta anche una equazione.*

Da ciò si comprende qual sia il modo di risolvere una equazione del primo grado.

Esempi $\quad ax+b^2-x=\frac{a}{b}x+c^2.$

Unendo nel primo membro i termini che contengono la x si avrà (§. 85)

$$ax+b^2-x-\frac{a}{b}x=c^2$$

Lasciando soli i termini con la x nel primo membro viene (§. 85)

$$ax-x-\frac{a}{b}x=c^2-b^2 \text{ : o pure}$$

$$x\left(a-1-\frac{a}{b}\right)=c^2-b^2 \text{ , e}$$

$$\frac{(ab-b-a)x}{b}=c^2-b^2.$$

Togliendo il denominatore alla x, si ha (§. 86)

$$(ab-b^2-a)x=(c^2-b^2)b.$$

Togliendo il coefficiente alla x (§. 87), risulta

$$x=\frac{(c^2-b^2)b}{ab-b^2-a}.$$

ch'è il valore della incognita.

Sia $\frac{2}{3}x + 6x - 10 = 4x - 5.$

Si avrà $\frac{2}{3}x + 6x - 4x = 10 - 5,$

e riducendo $\frac{8}{3}x = 5$, ed $x = \frac{15}{8}$;

che è il valore della x.

Per avere una pruova che si è bene operato, nella data equazione si sostituisca per x $\frac{15}{8}$ e si ottiene

$$\frac{2}{3}\times\frac{15}{8}+6\times\frac{15}{8}-10=4\times\frac{15}{8}-5.$$

e $$\frac{30}{24}+\frac{90}{8}-10=\frac{60}{8}-5,$$

riducendo $$\frac{30}{24}+\frac{270}{24}-10=\frac{180}{24}-5,$$

e $$\frac{300}{24}-\frac{180}{24}=5,\ \frac{120}{24}=5.\quad e\quad 5=5.$$

Percui il valore di $x=\frac{15}{8}$ soddisfa l'equazione data, ciò è un segno evidente che alla incognita gli compete il trovato valore.

Sia $$ax + bx = c:$$

si ha $x=\dfrac{c}{a+b}$.

Per vedere se con questo valore resta soddisfatta l'equazione, si pone per x $\dfrac{c}{a+b}$ ed avrassi

$$\frac{ac}{a+b}+\frac{bc}{a+b}=c,\ e\quad \frac{ac+bc}{a+b}=\frac{c(a+b)}{a+b}=c,\ e\ c=c$$

dunque il valore $\dfrac{c}{a+b}$ fa risultare il primo eguale al secondo membro.

Applichiamo le date regole alla soluzione de' problemi.

89. *Problema*. Un padre ha il sestuplo della età del suo figlio, e la somma delle loro età è 91 anni: Qual è l'età di ciascuno?

Sia x l'età del figlio: in conseguenza secondo le condizioni del problema, l'età del padre è $6x$. Ma queste età debbano fare 91 anni: dunque avremo l'equazione

$$6x + x = 91\,;$$

$$7x = 91\,,\ \text{ed}\ x = \frac{91}{7} = 13;$$

perciò il figlio ha 13 anni, e il padre ne ha $6 \times 13 = 78$. Infatti $78 + 13 = 91$. Con ciò è risoluto il problema e verificata la soluzione.

90. *Problema.* Un tremuoto abbattè in un giorno la metà di certe case, nel giorno seguente un terzo, un duodecimo negli altri giorni, e restano in piedi 63 case. Quante erano?

Sia x il numero di tutte le case; saranno $\frac{1}{2}\,x$ le cadute nel primo giorno, $\frac{1}{3}\,x$ e $\frac{1}{12}\,x$ le cadute negli altri giorni: e poichè le case cadute e le restate sono x, si avrà per equazione del problema

$$\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{12}\,x + 63 = x$$

riducendo: moltiplicando l'equazione per 12 avremo

$$6x + 4x + x + 756 = 12x\,,\ \text{e}$$
$$11x + 756 = 12x\,,$$
$$x = 756.\ \text{case.}$$

Infatti le case cadute sono $\frac{756}{2} + \frac{756}{3} + \frac{756}{12}$ unite a quelle che rimasero cioè a 63, debbono fare 756: dunque

$$378 + 252 + 63 + 63 = 756.$$

91. *Problema.* Si cerca un numero tale che il suo terzo il suo quinto, ed il suo sesto, facciano lo stesso numero diminuito di 60.

Il problema posto in equazione viene

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = x - 60.$$

Si moltiplica tutta l'equazione per 30, e si ha

$$10x + 6x + 5x = 30x - 1800$$
$$21x = 30x - 1800$$
$$9x = 1800\,,\ x = 200.$$

Infatti	200
il terzo	$66\frac{2}{3}$
il quinto	40
il sesto	$33\frac{1}{3}$
	140

Questo numero è eguale a 200 diminuito di 60.

92. *Problema.* Trovare due numeri la cui somma sia s, e la loro differenza sia d.

Sia x il numero maggiore, il minore sarà $s-x$: la loro differenza verrà espressa da $x-(s-x)$: ma questa deve pareggiare d, dunque ne risulta la equazione.

$$x-(s-x)=d, \quad \text{e} \quad x-s+x=d$$

dalla quale $\quad 2x=s+d$, ed $x=\dfrac{s+d}{2}$

ch'è il numero maggiore: il minore sarà.

$$s-x=s-\frac{s+d}{2}=\frac{2s-s-d}{2}=\frac{s-d}{2}$$

Da ciò si rileva il seguente principio: che *il numero maggiore è eguale alla metà della somma più la metà della differenza, ed il minore è eguale alla metà della somma meno la metà della differenza.*

Sia 49 la somma di due numeri, 23 la loro differenza, avremo $\dfrac{49+23}{2}=36$ pel numero maggiore, e $\dfrac{49-23}{2}=13$ pel numero minore. Infatti la somma di 36 e 13 è 49, e la differenza è 23.

93. *Problema.* Dividere il numero a in tre parti, le quali siano proporzionali ai numeri m,n,p.

Sia x la prima parte: per le condizioni del problema viene $m:n::x:\dfrac{nx}{m}$ che sarà la seconda parte, e $m:p::x:\dfrac{px}{m}$, la terza parte: ma queste tre parti unite debbano fare a, quindi ne emerge l'equazione

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a\,;$$

da cui $\quad mx+nx+px=ma$, ed $x=\dfrac{ma}{m+n+p}$.

ch' è il valore della prima parte : essendo $\frac{nx}{m}$ la seconda, risulterà col detto valore di

$$x\,\frac{n}{m}\times\frac{ma}{m+n+p}=\frac{na}{m+n+p}\,;$$

e la terza essendo

$$\frac{px}{m}\ \text{verrà}\ \frac{p}{m}\times\frac{ma}{m+n+p}=\frac{pa}{m+n+p}\,.$$

Si chiamino A, B, C i tre valori rinvenuti sarà

$$A=\frac{ma}{m+n+p}\quad B=\frac{na}{m+n+p}\quad C=\frac{pa}{m+n+p}$$

da queste tre equazioni ne nascono le seguenti proporzioni

$$m+n+p : m :: a : A$$
$$m+n+p : n :: a : B$$
$$m+n+p : p :: a : C$$

Onde nasce la seguente regola

Per dividere un numero in tre parti proporzionali a tre numeri dati, si sommano i tre numeri, e poi si stabiliscono tre proporzioni: il primo termine delle quali è la somma de' tre numeri, il secondo termine è il numero proporzionale ad una data parte, il terzo termine è il numero dato, ed il quarto proporzionale sarà la parte corrispondente al numero proporzionale.

94. *Problema.* Tre negozianti si debbono dividere la somma di d. 21375 proporzionalmente ai loro capitali posti in negozio, che sono nella ragione di 3, 5, e 11.

$$\text{Sarà } A=\frac{3\times21375}{3+5+11}=\frac{64125}{19}=3375^{\text{ducati}}$$

$$B=\frac{5\times21375}{3+5+11}=5625^{\text{ducati}}$$

$$C=\frac{11\times21375}{3+5+11}=12375^{\text{ducati}}$$

I valori di A, B, e C sono le parti spettanti a ciascuno negoziante. Infatti la loro somma è $3375+5625+12375=21375$.$^{\text{d}}$

I tre suddetti valori si possono avere dalle proporzioni

$$19 : 3 :: 21375 : A = 3375.$$
$$19 : 5 :: 21375 : B = 5625.$$
$$19 : 11 :: 21375 : C = 12375.$$

Lo stesso vale se un numero dato si dovesse dividere proporzionalmente, a quattro, cinque ec. numeri.

Questo quesito corrisponde alla regola di società che risguarda i problemi aritmetici.

95. *Problema.* Due corrieri A, e B partono da due punti differenti di una strada, il corriere A si mette in cammino 2 ore dopo di B; A in un'ora fa 8 miglia, B ne fa 6, la loro distanza prima di partire è 30 miglia; si cerca qual sarà il loro punto d'incontro.

Supponiamo che il corriere B dopo aver fatto x miglia sia incontrato da A, il quale dovrà fare in conseguenza $x+30$ miglia. E perchè B in un'ora fa 6 miglia, per fare x miglia impiegherà ore $\frac{x}{6}$: similmente A per fare $x+30$ miglia dovrà impiegare ore $\frac{x+30}{8}$: ma secondo le condizioni del problema A si mette in cammino 2 ore dopo di B; ne risulterà l'equazione

$$\frac{x}{6}-\frac{x+30}{8}=2 : \text{e}$$

$$8x-6x-180=2\times 48,$$

$$2x=276, \quad x=138, \text{ e } x+30=138+30=168.$$

Ossia i corrieri s'incontreranno quando il primo ha camminato 168 miglia, ed il secondo 138 miglia.

Infatti il corriere A sta in cammino un numero di ore espresso da $\frac{168}{8}=21$: e B sta in cammino ore $\frac{138}{6}=23$ percui la loro differenza è 2 ore ch'è il tempo elasso il quale il corriere A si è posto in moto.

Con lo stesso metodo si possono risolvere i quesiti simili a questo: cioè a dire allorchè i corrieri vadano in opposta direzione.

96. *Problema.* Trovare tutti gl'istanti che la lancetta dei minuti si trova su quella delle ore.

Il quadrante degli orologi è diviso in 12 parti ciascuna delle quali indica un'ora. Si sa che nel mezzo-giorno la lancetta de' minuti coincide con quella delle ore: quindi sia x lo spazio percorso dalla lancetta delle ore per trovarsi corrispondente con quella de' minuti dopo il mezzo-giorno, e perchè la lancetta de' minuti ha tale velocità che quando quella delle ore fa un certo cammino, essa ne fa uno 12 volte maggiore, percui nel mentre che la lancetta delle ore percorre lo spazio x, quella de' minuti ne percorre $12x$: ma quando la prima si avanza per x la seconda per raggiungerla ne deve fare $12+x$, quindi avremo l'equazione

$$12x=12+x, \text{ ed } x=\frac{12}{11}=1\frac{1}{11}.$$

Ossia le due lancette s'incontreranno dopo il mezzo-giorno dopo ore $1\frac{1}{11}$ la prima volta: in conseguenza per incontrarsi la seconda volta dovrà passare il tempo di ore $1\frac{1}{11}$, cioè si incontreranno la seconda volta ad ore $2\frac{2}{11}$, la terza volta ad ore $3\frac{3}{11}$, quindi ad ore $4\frac{4}{11}$, $5\frac{5}{11}$, $6\frac{6}{11}$, $7\frac{7}{11}$, $8\frac{8}{11}$, $9\frac{9}{11}$, $10\frac{10}{11}$, $11\frac{11}{11}=12$ ossia s'incontrano un'altra volta a mezzo-giorno.

EQUAZIONI A PIÙ INCOGNITE.

97. Siano le due equazioni da risolversi

$$7x+4y=26$$
$$5x-3y=1$$

val quanto dire conoscere i valori di x, e di y.

Dalla prima si ha $x=\frac{26-4y}{7}$, e dalla seconda $x=\frac{1+3y}{5}$: quindi

$$\frac{26-4y}{7}=\frac{1+3y}{5}$$

e $130-20y=7+21y$, e $21y+20y=123$, $y=\frac{123}{41}=3$.

Similmente dalla prima si ottiene $y=\frac{26-7x}{4}$, e dalla seconda $y=\frac{5x-1}{3}$ perciò

$$\frac{26-7x}{4}=\frac{5x-1}{3},$$

e $78-21x=20x-4$, $41x=82$ e $x=2$.

Quindi $y=3$, ed $x=2$ sono i valori delle incognite.

Infatti eseguendo le sostituzioni nelle proposte equazioni risulta

$$7\times2+4\times3=26, \text{ e}$$
$$5\times2-3\times3=1.$$

Il metodo in parola dicesi metodo di *eguaglianza.*

98. Siano le stesse equazioni da risolversi.

Dalla prima si ha $x=\frac{26-4y}{7}$, questo valore sostituito nella seconda dà $\frac{5(26-4y)}{7}-3y=1$: dalla quale $130-20y-21y=7$, $130-41y=7$, $41y=123$, ed $y=3$.

Similmente dalla seconda equazione si ritrae $y=\frac{5x-1}{3}$, eseguendo la sostituzione nella prima, si ottiene

$$7x+\frac{4(5x-1)}{3}=26, \text{ e } 21x+20x-4=78,$$
$$41x=82, \text{ ed } x=2.$$

Questo metodo di risolvere l'equazioni dicesi di *sostituzione.*

99. Siano le medesime equazioni

$$7x+4y=26$$
$$5x-3y=1$$

da risolversi.

Si moltiplica la prima per 3, e la seconda per 4, ed avremo

$$21x+12y=78$$
$$20x-12y=4$$

Sommandole insieme, viene $41x=82$, ed $x=2$.

Del pari moltiplicando la prima per 5, e la seconda per 7, avrassi

$$35x+20y=130$$
$$35x-21y=7$$

Sottraendo dalla prima la seconda viene

$$41y=123\text{, ed } y=\frac{123}{41}=3\text{;}$$

l'esposto metodo è detto de' *coefficienti*.

100. Siano finalmente le medesime equazioni

$$7x+4y=26$$
$$5x-3y=1$$

da risolversi.

Si moltiplica la prima per un numero m da determinarsi, e si ha $$7mx+4my=26m$$
tolto da questa la seconda, viene

$$x(7m-5)+y(4m+3)=26m-1.$$

E perchè m è un numero indeterminato, si supponga che abbia tal valore da far risultare zero il coefficiente di y, ossia

$$4m+3=0\text{, ed } m=-\frac{3}{4}$$

Sostituendo tal valore nella equazione ultima si ricava

$$x\left(-7\times\frac{3}{4}-5\right)=-26\times\frac{3}{4}-1\text{, e }-\frac{41}{4}x=-\frac{82}{4}\text{, e}$$
$$41x=82\text{, onde } x=2.$$

Del pari supponendo m un tal numero da far risultare zero il coefficiente della x, cioè facendo

$$7m-5=0\text{, ed } m=\frac{5}{7}\text{: quindi}$$

$$y\left(4\times\frac{5}{7}+3\right)=26\times\frac{5}{7}-1 \text{ da cui } \frac{41y}{7}=\frac{130-7}{7}\text{, } y=3.$$

Un tal metodo è stato ideato da *Bezout*.

Gli esposti quattro principî per la risoluzione delle equazioni a due variabili si possono applicare quando il numero delle equazioni è maggiore di due: e tal volta si usano promiscuamente, secondochè si prestano i casi particolari.

101. Siano generalmente le equazioni da risolversi.

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'$$

Si moltiplica la prima per a', e la seconda per a, avremo

$$aa'x+ba'=ca'$$
$$aa'x+ab'=ac'.$$

Dalla prima tolta la seconda, viene

$$y(ba'-b'a)=ca'-c'a, \text{ ed } y=\frac{a'c-ac'}{ba'-ab'}.$$

Si moltiplica la prima per b', e la seconda per b, e si ha

$$ab'x+bb'y=cb'$$
$$ba'x+bb'y=c'b$$

tolto dalla seconda la prima, infine $x=\dfrac{bc'-cb'}{ba'-ab'}$.

Siano le equazioni

$$7x+4y=26$$
$$5x-3y=1.$$

Da risolversi coi due valori generali rinvenuti: si osserva che $7=a$, $4=b$, $26=c$, e $5=a'$, $-3=b'$, $1=c'$, onde

$$y=\frac{ca'-ac'}{ba'-ab'}=\frac{26\times5-1\times7}{4\times5+7\times3}=\frac{123}{41}=3.$$

Similmente

$$x=\frac{bc'-cb'}{ba'-ab'}=\frac{4\times1+26\times3}{4\times5+\ 7\times3}=\frac{82}{41}=2.$$

Da ciò si scorge che combinandosi i valori generali di x ed y convenevolmente si possono risolvere le equazioni con la semplice sostituzione.

102. Siano da risolversi le tre equazioni

$$x+\ y+\ z=6.$$
$$4x-2y+\ z=3.$$
$$3x+5y-3z=4.$$

Qualunque de' quattro metodi che si applicano, si perverrà a trovare il valore di ciascuna incognita. ma per fare meno calcoli possibili si può tenere il seguente andamento.

Dalla prima si rinviene il valore di z, ch'è

$$z=6-x-y$$

il quale sostituito nella seconda e terza dà

$$4x-2y+\ 6-x\ -\ y=3.$$
$$3x+5y-18+3x+3y=4.$$

riducendo $\quad 3x-3y=-3.$

$\qquad\qquad\quad\ 6x+8y=22.$

o pure $\quad x-\ y=-1$

$\qquad\qquad 3x+4y=11.$

dalla prima di queste si ha $y = x + 1$, sostituendo questo valore nell' altra viene

$$3x + 4x + 4 = 11 \text{ , ed } x = 1 \text{ ;}$$

$$\text{ma } y = x + 1 \text{ , dunque } y = 1 + 1 = 2 \text{ :}$$
$$\text{ma } z = 6 - x - y \quad = 6 - 1 - 2 = 3 \text{ :}$$

dunque $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ sono i valori delle tre incognite. Infatti sostituendoli nelle tre date equazioni le soddisfano; con ciò

$$1 + 2 + 3 = 6.$$
$$4 \times 1 - 2 \times 2 + 3 = 3.$$
$$3 \times 1 + 5 \times 2 - 3 \times 3 = 4.$$

Si potrebbero al pari delle equazioni a due incognite trovare i valori assumendo tre equazioni generali, ricavarne i valori di x, y, e z; quindi eseguire le analoghe sostituzioni.

103. *Problema*. Si vogliono conoscere due numeri la cui somma sia s, e la differenza sia d.

Siano x ed y i due numeri dati: sarà $x + y$ la lor somma, e $x - y$ la loro differenza: onde

$$x + y = s$$
$$x - y = d.$$

Si sommano queste due equazioni, e viene

$$2x = s + d \text{ , } x = \frac{s+d}{2} \text{ ,}$$

ch' è il numero maggiore. Si sottrae dalla prima la seconda, e risulta

$$2y = s - d \text{ , } y = \frac{s-d}{2} \text{ ,}$$

ch' è il numero minore.

104. *Problema*. Indovinate i ducati di A e di B: se A ne dà uno a B, ne hanno egual somma: se B ne dà due ad A, questo ne ha il doppio di B.

Siano x quelli di A, y quelli di B: la prima condizione dà

$$x - 1 = y + 1.$$

la seconda $\quad x + 2 = 2(y - 2).$

sottratta dalla seconda la prima si ha $y = 8$, $x = 10$.

105. *Problema*. Di tre cavalli, il primo con la metà del prezzo degli altri vale 25 zecchini; l' altro con un terzo del prezzo degli altri, 26; l' ultimo con la metà del prezzo degli altri, 29. Qual è il prezzo di ciascuno?

Siano x,y,z i tre prezzi cercati, le equazioni saranno

$$x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=25$$

$$y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=26$$

$$z+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=29$$

togliendo i fratti si ha

$$2x+y+z=50 \ldots \quad (1)$$
$$3y+x+z=78 \ldots \quad (2)$$
$$2z+x+y=58 \ldots \quad (3).$$

Si toglie la (1) dalla (2), e viene

$$2y-x=28 \ldots \quad (4).$$

Si moltiplica la (2) per 2 e se ne tolga la (3), il che dà

$$5y+x=98 \ldots \quad (5)$$

Infine si somma la (4) con la (5), e si trova $y=18$: dalla (4) $x=8$, e dalla (3) $z=16$.

106. *Se nel risolvere un problema si perviene ad un' assurda conseguenza, il problema sarà impossibile:* per esempio trovare un numero x eguale alla sua terza parte; ridotto il quesito in equazione viene

$$x=\frac{1}{3}x$$

cioè $1=\frac{1}{3}$ assurdo che dimostra impossibile il problema.

I problemi sono teoremi allorquando conducono ad equazioni identiche, cioè a $0=0$.

Supponiamo che un problema abbia tali condizioni da far risultare

$$2x-3y=100$$

$$3x-\frac{9y}{2}=150$$

Eliminando x, l'equazione finale in y verrà

$$\frac{100+3y}{2}=\frac{150+\frac{9y}{2}}{3}$$

e fatte le riduzioni si avrà

$300+9y=300+9y$ da cui $0=0$.

Si scorge che qualunque numero si sostituisca ad y, soddisferà sempre all' ultima equazione avuta. La ragione di ciò risulta da che la seconda delle date equazioni è la stessa che la prima: altra differenza non vi è in apparenza, che tutti i termini della seconda sono moltiplicati per $\frac{3}{2}$.

Vi è una specie d' impossibilità ne' problemi, allorchè il calcolo dà dei numeri frazionarî, o negativi, e che il problema non può essere risoluto che da numeri positivi. Infatti se si dicesse, si hanno **180** alunni in due classi, e ce ne sono **15** di più nella prima: si vuol conoscere il numero che esiste in ciascuna classe. Usando il metodo del problema **1**, si troverebbe $97\frac{1}{2}$ per la prima, e $82\frac{1}{2}$ per la seconda classe. Questi due numeri soddisfano alla soluzione numerica: perciocchè la lor somma è **180**, e la lor differenza è **15**.

Generalmente però si può stabilire, che *un problema dicesi determinato allorchè il numero delle equazioni corrispondenti pareggia il numero delle incognite*, in tal caso ogni incognita ha un sol valore.

Allorchè il numero delle incognite è maggiore del numero delle equazioni, il problema si dice indeterminato; e ciascuna incognita può avere infiniti valori.

Finalmente, *quando il numero delle incognite è minore del numero delle equazioni, il problema è detto più che determinato.* Spesse volte queste specie di soluzioni riescono impossibili.

In quanto ai problemi determinati se ne è esposto antecedentemente il metodo per la loro soluzione. Per gli altri faremo solo qualche osservazione dovendosene altrove far parola. Sia a risolvere l' equazione

$$x+y=10$$

Si scorge chiaramente che ponendo arbitrariamente, $x=1$; risulta $y=9$; $x=2$ viene $y=8$, $x=3$ si ricava $y=7$. così in seguito.

Inoltre facendo $x=\frac{1}{2}$, viene $y=9\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{4}$, $y=9\frac{3}{4}$ ec.

Così pure $x=-1$, emerge $y=11$, $x=-2$, $y=12$, così ec.

Perciò x ed y hanno infiniti valori, e quindi il problema è indeterminato.

Sia, per esempio $\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 3x + 4y &= 36 \\ x - y &= 12 \end{aligned}$

Si sommano la prima e la terza, avremo $x = 16$: dalla 3.ª si ottiene $y = 4$, questi due valori sostituiti nella seconda non la soddisfano, perciò $x = 16$, ed $y = 4$ non sono i veri valori delle incognite: il problema perciò è più che determinato e riesce impossibile a risolversi.

FORMAZIONE DELLE POTENZE.

107. La quantità a moltiplicata per a dà a^2, a^2 si dice la *seconda potenza* di a, ovvero il *quadrato* di a. Similmente $a \times a \times a = a^3$, a^3 si dice la *terza potenza* di a, ossia il *cubo* di a. Così pure a^4 è la *quarta potenza* di a. Generalmente a^n è la n^{ma} *potenza* di a.

Da ciò deriva *che una quantità moltiplicata per se stessa una volta dà il quadrato, due volte moltiplicata per se stessa dà il cubo, e così proseguendo.*

Inoltre $-a$ moltiplicata per $-a$ dà

a^2, $-a \times -a \times -a = -a^3$; $-a \times -a \times -a \times -a = a^4$, ec:

per cui *le potenze di una quantità positiva sono positive; le potenze pari di una quantità negativa sono positive: e le potenze dispari di una quantità negativa sono negative.*

Dall'esposto risulta che il quadrato di na è n^2a^2, il cubo è n^3a^3, ec. il quadrato di $-na$ è n^2a^2, il cubo è $-n^3a^3$, la quarta potenza è n^4a^4: vale a dire che per elevare un monomio a potenza, conviene osservare il segno, il coefficiente, la lettera, e l'esponente. *Se la radice è positiva, o negativa, le potenze pari debbano essere positive: se la radice è negativa le potenze dispari saranno pure negative.*

I coefficienti si elevano alla data potenza: la lettera è la stessa di quella della radice ma con un esponente eguale all'indice della radice.

Esempi

$$(-3a)^2 = 9a^2 \; ; (-3a)^3 = -27a^3 \, , (-3a)^4 = 81a^4, \text{ ec.}$$

$$(2a^2)^2 = 4a^4 \, , (2a^2)^3 = 8a^6 \, , (2a^2)^4 = 16a^8 \, , (2a^2)^5 = 32a^{10}.$$

$$\text{e} \quad (na^m)^p = n^p a^{mp}.$$

$$(-na^m)^p = \pm n^p a^{mp} :$$

il segno più vale se p è pari, il meno se p è dispari.

I quadrati de' numeri naturali semplici sono,

1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 . 64 . 81 , cioè di
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9.

I cubi degli stessi numeri sono

1 . 8 . 27 . 64 . 125 . 216 . 343 . 512 . 729
cioè di 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9.

108. Moltiplicando $a+b$ per $a+b$ dà $a^2+2ab+b^2$, ossia $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$: così $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(-a-b)^2=a^2+2ab+b^2$: da questo si ricava la seguente regola: *il quadrato di un binomio è eguale al quadrato del primo termine, al doppio prodotto del primo pel secondo, ed al quadrato del secondo*, e se i termini del binomio sono ambedue positivi, o ambedue negativi, i termini del quadrato sono tutti positivi; se poi uno è positivo e l'altro è negativo, i due quadrati risultano positivi ed il doppio prodotto negativo.

Esempi

$(2a^2+3b)^2=4a^4+12a^2b+9b^2$, $(3a^3-b^2)^2=9a^6-6a^3b^2+b^4$.
$\left(-5a^2-\frac{1}{2}bc^2\right)^2=25a^4+5a^2bc^2+\frac{1}{4}b^2c^4$, $(na^3+mbc)^2=n^2a^6+2mnbc+m^2b^2c^2$.

109. Se si voglia elevare il trinomio $a+b+c$ a quadrato, si considera questo trinomio come un binomio facendo $b+c=m$, e perciò $(a+b+c)^2=(a+m)^2=a^2+2am+m^2$, e posto per m il suo valore viene $(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+c^2+2bc$.

Similmente per fare il quadrato del quatrinomio $a+b+c+d$, si ponga $a+b=m$, $c+d=n$, quindi $(a+b+c+d)^2=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$, sostituendo $(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+2ad+2bd+c^2+2cd+d^2$.

In simil guisa si eleva a quadrato un polinomio qualunque

Esempio

$(3a^2+4bc^2-2b^4)^2$, si faccia $3a^2+4bc^2=m$, $2b^4=n$, e quindi $(3a^2+4bc^2-2b^4)^2=(m-n)^2=m^2-2mn+n^2=(3a^2+4bc^2)^2-2(3a^2+4bc^2)\times 2b^4+(2b^4)^2=9a^4+24a^2bc^2+16b^2c^4-62a^2b^4-16b^5c^2+4b^8$.

110. Il quadrato di $\frac{7}{8}$ è $\frac{7}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{49}{64}=\left(\frac{7}{8}\right)^2$: del pari $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$: ne segue che *il quadrato di una frazione è eguale*

al quadrato del numeratore diviso per quello del denominatore

Esempi

$$\left(\frac{2a^2}{b}\right)^2=\frac{4a^4}{b^2},\ \left(\frac{-3a^3}{2b}\right)^2=\frac{9a^6}{4b^2}.$$

$$\left(\frac{na^p}{b^q}\right)^2=\frac{n^2a^{2p}}{b^{2q}}.$$

$$\left(\frac{2a^2-b}{3a+c}\right)^2=\frac{4a^4-4a^2b+b^2}{9a^4+6ac+c^2}.$$

$$\left(\frac{a^3-\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}}{a-\frac{3}{4}b^{-1}}\right)^2=\frac{a^6-a^3b^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}b}{a^2-\frac{3}{2}ab^{-1}+\frac{9}{4}b^{-2}}$$

111. Moltiplicando $a+b$ per $a+b$, e per $a+b$ si avrà

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Cioè *il cubo di un binomio, si ottiene sommando i cubi de' suoi termini, ed il triplo quadrato di ciascuno di essi moltiplicato per l' altro.*

Esempi

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\ (3a^2-bc)^3=27a^6-27a^4bc+9a^2b^2c^2-b^3c^3,\ (ma^{\frac{1}{2}}+nb)^3=m^3a^{\frac{3}{2}}+3mnab+3mn^2a^{\frac{1}{2}}b^2+n^3b^3,\ \left(a^{\frac{1}{4}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)^3=a^{\frac{3}{4}}-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+12a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{3}}-8b.$$

112. Se si voglia elevare il trinomio $a+b+c$ a cubo si faccia $b+c=m$, e si avrà

$$(a+m)^3=a^3+3ma^2+3m^2a+m^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3=a^3+3ba^2+3a^2c+3ab^2+4abc+c^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3.$$

questo metodo si estende ad un qualunque polinomio.

113. Il cubo di $\frac{2}{3}$ è $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$; così $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a^3}{b^3}$.

Esempi

$$\left(\frac{12}{13}\right)^3=\frac{1728}{2197}$$

$$\left(\frac{3,1}{4,3}\right)^3=\frac{29,791}{79,507}.$$

$$\left(\frac{a^2-b}{3+b^2}\right)^3=\frac{a^6-3a^4b+3a^2b-b^3}{27+27b^2+9b^2+b^6}$$

114. Essendo

$$(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

e così proseguendo. In quanto a ciascuno degli ottenuti risultamenti

1.° Il primo termine è uguale al primo termine del binomio elevato all' indice della potenza.

2.° Il secondo termine contiene il primo termine del binomio elevato all' indice della potenza meno uno, il terzo termine contiene il primo termine del binomio elevato all' indice della potenza meno due, così ec., cioè a dire ciascuno sviluppo è ordinato pel primo termine del binomio.

3.° Nel secondo termine si trova la prima potenza della seconda parte del binomio, nel terzo termine la seconda potenza, nel quarto termine la terza potenza ec., ossia lo sviluppo è ordinato inversamente per la seconda parte del binomio, cioè cominciando dalla potenza più piccola, e terminando alla più grande.

4.° L' ultimo termine è eguale alla seconda parte del binomio elevata all' indice della potenza.

5.° In uno stesso termine la somma degli esponenti è eguale all' indice della potenza.

6.° Il coefficiente del primo termine è l' unità. Il coefficiente del secondo termine è eguale all' esponente del primo termine moltiplicato pel suo coefficiente, e diviso per 1. Il coefficiente del terzo termine è eguale al coefficiente del secondo termine moltiplicato per l' esponente della prima parte del binomio contenuta in detto secondo termine, e diviso per 2. Il coefficiente del quarto termine è eguale al coeffi-

ciente del terzo termine moltiplicato per l'esponente della prima parte del binomio, diviso per 3. Il coefficiente del quinto termine è eguale al coefficiente del quarto termine moltiplicato per l'esponente della prima parte del binomio, diviso per 4 ec.; in una parola, il coefficiente di un termine è eguale al coefficiente del termine antecedente, moltiplicato per l'esponente della prima parte del binomio, esistente in questo termine, diviso pel numero de' termini antecedenti.

Conseguita da ciò, che se l'indice di $(a+b)$ fosse m, numero intero e positivo, si avrebbe

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.}a^{m-3}b^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}b^4\ldots.b^m$$

è questa la celebre formola conosciuta sotto il nome di *binomio di Newton*.

115. Essendo $a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$ sarà $(a+b)^m=$ $a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$; facendo $\frac{b}{a}=y$, si avrà $a^m(1+y)^m=(a+b)^m$,

ma per la regola di sopra

$$(1+y)^m=1+my+\frac{m(m-1)}{2}y^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.}y^3\ldots\ldots y^m,$$

e quindi

$$(a+b)^m=a^m\left[1+my+\frac{m(m-1)}{2}y^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.}y^3..y^m.\right]$$

Questa maniera di elevare a potenza un binomio, riesce molto facile, perciocchè si tratta solamente di fare le sole potenze di $y=\frac{b}{a}$.

Esempio. 1.° Elevare $3c^2d-\frac{2p^3}{q}$ alla potenza 4.ª

Paragonata $\left(3c^2d-\frac{2p^2}{q}\right)^4$ con la prima formola del binomio si ha

$$a=3c^2d,\ b=-\frac{2p^2}{q},\ m=4;\ \text{perciò}$$

$$a^m=(3c^2d)^4=3^4.c^{2.4}d^4=81c^8d^4$$

$$ma^{m-1}b=4\,(3c^2d\,)^{4-1}\times-\frac{2p^2}{q}=4.3^3.c^{2.3}d^3\times-$$

$$\frac{2p^2}{q}=-4.27.c^6d^3.\frac{2p^2}{q}=-216\frac{c^6d^3.p^2}{q}$$

$$\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2=\frac{4(4-1)}{2}(3c^2d)^{4-2}\times\left(-\frac{2p^2}{q}\right)^2=$$

$$6.9.c^4d^2\times\frac{4p^4}{q^2}=216\,\frac{c^4d^2p^4}{q^2}.$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3.}a^{m-3}b^3=$$

$$\frac{4(4-1)(4-2)}{6}(3c^2d)^{4-3}\times\left(-\frac{2p^2}{q}\right)^3=$$

$$4.3c^2d\times-\frac{8p^6}{q^3}=-96\,\frac{c^2dp^6}{q^3}.$$

$$b^m=\left(-\frac{2p^2}{q}\right)^4=\frac{2^4.p^{2.4}}{q^4}=16\,\frac{p^8}{q^4}.$$

Infine si avrà

$$\left(3c^2d-\frac{2p^2}{q}\right)^4=81c^8d^4-216\,\frac{c^6d^3p^2}{q}+216\frac{c^4d^2p^4}{q^2}-$$

$$96\,\frac{c^2dp^6}{q^3}+16\,\frac{p^8}{q^4}.$$

Esempio 2.° Elevare con la seconda formola q^2+2np alla terza potenza.

Avremo $q^2+2np=q^2\left(1+\frac{2np}{q^2}\right)$, e perciò $(q^2+2np)^3=$ $q^{2.3}.\left(1+\frac{2np}{q^2}\right)^3=q^6\left(1+\frac{2np}{q^2}\right)^3$ facendo $y=\frac{2np}{q^2}$;

ed $m=3$, si ha

$$(1+y)^m=\left(1+\frac{2np}{q^2}\right)^3 ; \text{ sarà}$$

$$1=1;\ my=3\times\frac{2np}{q^2}=6\,\frac{np}{q^2}$$

$$\frac{m(m-1)}{2}y^2=\frac{3.2}{2}\left(\frac{2np}{q^2}\right)^2=12\,\frac{n^2p^2}{q^2}$$

$$y^3=\left(\frac{2np}{q^2}\right)^3=8\,\frac{n^3p^3}{q^6};\ \text{ossia}$$

$$\left(1+\frac{2np}{q^2}\right)^3=1+6\,\frac{np}{q^2}+12\,\frac{n^2p^2}{q^4}+8\,\frac{n^3p^3}{q^6};$$

in conseguenza

$$q^6\left(1+\frac{2np}{q^2}\right)^3=(q^2+2np)^3=q^6\left(1+6\frac{np}{q^2}+12\frac{n^2p^2}{q^4}+8\frac{n^3p^3}{q^6}\right).$$

E trasportando il q^6 dentro la parentesi si ha infine

$$(q^2+2np)^3=q^6+6npq^4+12\,n^2p^2q^2+8n^3p^3.$$

Questi due esempî fanno conoscere la maniera come in casi simili si possono adoperare le due formole antecedenti.

CALCOLO DE' RADICALI.

116. Ogni quantità può essere qualunque potenza in riguardo a diverse quantità, così a^6 sarà sesta potenza di a, sarà 3.ª potenza di a^2, sarà seconda di a^3; perciocchè a moltiplicata cinque volte per se stessa dà a^6, a^2 moltiplicata due volte per se stessa dà a^6, ed a^3 moltiplicata una volta per se stessa dà a^6. Viceversa a si dice radice sesta di a^6; a^2 si dice radice terza di a^6; ed a^3 radice seconda di a^6. Da ciò conseguita che l'estrazione di radice è una operazione opposta dell'elevazione a potenza. Così la potenza m^{sima} di a^n è a^{mn}; e $a^{\frac{n}{m}}$ è la radice m^{sima} di a^n. Così pure la potenza m^{sima} di $(a+b)^n$ è $(a+b)^{mn}$, è la radice m^{sima} sarà $(a+b)^{\frac{n}{m}}$.

$$(-a^n)^3=-a^n\times-a^n\times-a^n=-a^{3n}\ldots\ldots(+a^n)^3=a^n\times a^n\times a^n=a^{3n}.$$

$$(-a^n)^4=-a^n\times-a^n\times-a^n\times-a^n=a^{4n}\ldots\ldots(+a^n)^4=a^n\times a^n\times a^n\times a^n=a^{4n}.$$

Cioè *le potenze pari, o dispari, di tutte le quantità positive, risultano positive, e semplicemente le potenze dispari delle quantità negative sono negative. E viceversa le radici pari, o dispari delle quantità positive sono positive, e le radici pari delle quantità negative non esistono, per cui si dicono immaginarie, perciocchè non esiste nessuna quantità negativa che elevata a potenza pari dia una quantità positiva.*

Infatti si voglia la radice seconda di $-a^{2n}$, se questa si supponga essere $+a^{\frac{2n}{2}}=+a^n$ non dà $-a^{2n}$, moltiplicata per se stessa, se si supponga essere $-a^n$, neppure dà $-a^{2n}$ moltiplicata per se stessa, onde ec.

In generale per estrarre la radice da una quantità si badi 1.° al segno, quando il segno di tale quantità è $+$ la radice sarà sempre positiva, quando il segno è $-$, la radice sarà negativa se l' indice è dispari. Se poi l'indice è pari la radice sarà immaginaria. Indi si estrae la radice del coefficiente, in seguito si scrive la lettera col suo esponente, diviso per l' indice della radice.

Per estrarre da a^n la radice m^{uma}, si ha $a^{\frac{n}{m}}$, se n contiene esattamente m, la radice sarà esatta, o *commensurabile;* diversamente la radice si avrà per approssimazione, e dicesi radice *incommensurabile*. Queste specie di radici danno luogo ai radicali, i quali altro non sono che potenze frazionarie delle quantità. Infatti a^n elevata alla potenza $\frac{p}{q}$ dà $(a^n)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{np}{q}}$ ed $a^{\frac{m}{n}}$ significa $(a^m)^{\frac{1}{n}}$.

Le quantità radicali, o potenze frazionarie si esprimono col segno $\sqrt{}$, che dinota la radice. E per rappresentare le diverse specie di radici sul segno $\sqrt{}$, si scrive l'indice della radice, ossia il denominatore dell' esponente della quantità.

$$\text{Così}\quad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p},\ (a+b^2)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a+b^2)^m};\ (a-3b^2)^{\frac{2}{3}}=$$
$$\sqrt[3]{(a-3b^2)^2}=\sqrt[3]{a^2-6ab^2+9b^4\ldots\ldots}\ \text{ec.}$$

Allorchè sul segno $\sqrt{}$ non si vede alcun numero, si sottintende sempre il 2.

117. *Il coefficiente di un radicale, è quella quantità che*

sta fuori del suo segno, e che non è separata nè dal $+$ *nè dal* $-$; così $3a\sqrt[m]{(a+b)^2}$, $3a$ n'è il coefficiente: $(a-4b^2)^2\sqrt[3]{a+b}$, $(a-4b^2)^2$ è il coefficiente.

118. *Si dicono radicali simili que' che hanno lo stesso indice; e che sotto i rispettivi* $\sqrt{\ }$ *hanno le medesime quantità:* così $2a\sqrt[m]{a^2-4ab}$, e $-(a+b)^2\sqrt[m]{a^2-4ab}$ sono radicali simili.

119. Essendo $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}}=\sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}$$

si conchiude che *un radicale non cambia di valore moltiplicando o dividendo, tanto l'indice che l'esponente della quantità che sta sotto il segno* $\sqrt{\ }$ *per la stessa quantità.*

120. Poichè $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[1]{a^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[q]{a^{\frac{mq}{n}}}$; questa è la maniera come trasformare un radicale in un altro di dato indice.

Esempio. $\sqrt[p+q]{(a-2b^2)^3}$ si vuol trasformare in un altro che abbia per indice $m+n$; sarà

$$\sqrt[p+q]{(a-2b^2)^3}=\sqrt[1]{(a-2b^2)^{\frac{3}{p+q}}}=\sqrt[m+n]{(a-2b^2)^{\frac{3(m+n)}{p+q}}}$$

Si vuo' dare l'indice 7 al radicale

$$\sqrt[3]{(a+b)^4}=\sqrt[1]{(a+b)^{\frac{4}{3}}}=\sqrt[7]{(a+b)^{\frac{28}{3}}}.$$

121. Ridurre $\sqrt[n]{a^m}, \sqrt[p]{b^q}, \sqrt[r]{a-3ac}$, allo stesso indice npr

Si ha $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[npr]{a^{mpr}}$, $\sqrt[p]{b^q}=\sqrt[npr]{b^{nrq}}$, $\sqrt[r]{a-3ac}=$
$\sqrt[npr]{(a-3ac)^{np}}$.

SOMMA.

$$\sqrt{ab}+c..$$
$$-4\sqrt{ab}-\sqrt[3]{abc}.$$
$$c-3\sqrt{ab}-\sqrt[3]{abc}.$$

$$-\frac{2}{3}\sqrt{a+b}+3\sqrt[3]{ab^2}-(a+b)\sqrt[4]{a^2-b^2}$$
$$+4\sqrt{a+b}-7\sqrt[3]{ab^2}+5(a+b)\sqrt[4]{a^2-b^2}+a^2b-\sqrt{a}$$
$$\frac{10}{3}\sqrt{a+b}-4\sqrt[3]{ab^2}+4(a+b)\sqrt[4]{a^2-b^2}+a^2b-\sqrt{a}$$

SOTTRAZIONE.

$\sqrt{xy}+c$	$4\sqrt{ac}-3\sqrt[3]{abc}$	$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{z}$
$\sqrt[3]{cx}+y$	$2\sqrt{ac}+3\sqrt[3]{abc}$	$-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x+y}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{z}$
$c-y+\sqrt{xy}-\sqrt[3]{cx}$,	$2\sqrt{ac}-6\sqrt[3]{abc}$,	$-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x+y}+\frac{7}{4}\sqrt[3]{z}$

122. *Per moltiplicare o dividere i radicali di diverso indice, bisogna prima ridurli ad avere lo stesso indice, senza che cambiano di valore.*

Così $\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[p]{b^q}=a^{\frac{m}{n}}\times b^{\frac{q}{p}}=a^{\frac{mp}{np}}\times b^{\frac{nq}{np}}=(a^{mp}.b^{nq})^{\frac{1}{np}}=\sqrt[np]{a^{mp}b^{nq}}$; e poscia moltiplicare le quantità che stanno sotto il radicale.

$$\textit{Esempi}-3\sqrt{a+b}\times2\sqrt[3]{a^2-b^2}=-3\sqrt[6]{(a+b)^3}\times2$$
$$\sqrt[6]{(a^2-b^2)^2}=-6\sqrt[6]{(a+b)^3(a^2+b^2)^2}=$$
$$-6\sqrt[6]{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a^4+2a^2b^2+b^4)}.$$

123. Poichè $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, sarà $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p=a^{\frac{mp}{n}}=\sqrt[n]{a^{mp}}$; cioè *per elevare un radicale ad una data potenza, bisogna semplicemente elevare a questa potenza la quantità che sta sotto il segno* $\sqrt{\ }$.

Così la 3ª potenza di $\sqrt[4]{a^5}$ è $\sqrt[4]{a^{15}}$, la quarta di $-2a^2\sqrt[5]{(a+b)^2}$ e uguale a $16a^8\sqrt[5]{(a+b)^8}$.

124. Essendo $a\sqrt[n]{b^m}=a.\,b^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{n}{n}}.\,b^{\frac{m}{n}}=\left(a^n b^m\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^n b^m}$; cioè *per passare il coefficiente del radicale sotto il segno* $\sqrt{\ }$ *bisogna elevarlo all'indice del radicale, e fare la moltiplicazione.*

Esempi.

$$+a^2\sqrt{a+b}=+\sqrt[n]{a^{2n}(a+b)}=+\sqrt[n]{a^{2n+1}a^{2n}b}.$$

$$2a\sqrt[3]{3b^4}=\sqrt[3]{24a^3b^4}\ldots 2(a+b)\sqrt[3]{a^2+2ab}=2\sqrt[3]{(a+b)^3(a^2+2ab)}$$

$$a^2+2ab\sqrt[3]{a^2+b}=a^2+\sqrt[3]{8a^3b^3(a^2+b)}.$$

125. Essendo $\sqrt[n]{a^{2n}b^2}=a^{\frac{2n}{n}}\,b^{\frac{2}{n}}=a^2\sqrt[n]{b^2}$; così pure

$$\sqrt[3]{a^3+5a^4b+a^5}=\sqrt[3]{a^3(1+5ab+a^2)}=a\sqrt[3]{1+5ab+a^2}$$

Ossia *per porre una quantità da dentro fuori il radicale, conviene che sia in tutti i termini, indi si divida il suo esponente per l'indice del radicale.*

126. Poichè $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$; cioè *per elevare un radicale a potenza eguale al suo indice, si scrive semplicemente la quantità che sta sotto il segno* $\sqrt{\ }$.

Così $\left(\sqrt[p]{a^2+b^2}\right)^p=a^2+b^2$.

MOLTIPLICAZIONE.

127. Moltiplicare $2a\sqrt[3]{ab}-2a^3\sqrt{b}$ per $a^2\sqrt{ab}+\sqrt[3]{a^2}$; riducendoli allo stesso indice 6 viene.

$$\begin{array}{l}
2a\sqrt[3]{ab}-2a^3\sqrt{b}=2a\sqrt[6]{a^2b^2}-2a^3\sqrt[6]{b^3}\\
2a^2\sqrt{ab}+\sqrt[3]{a^2}=2a^2\sqrt[6]{a^3b^3}+\sqrt[6]{a^4}\\
\hline
\end{array}$$

$$4a^3\sqrt[6]{a^5b^5}-4a^5\sqrt[6]{a^3b^6}+2a\sqrt[6]{a^6b^2}-2a^3\sqrt[6]{a^4b^3};\text{ ossia}$$
$$4a^3\sqrt[6]{a^5b^5}-4a^5b\sqrt[6]{a^3}+2a^2\sqrt[6]{b^2}-2a^3\sqrt[6]{a^4b^3}.$$

Esempio.

$$\begin{array}{ll}
a+\sqrt{a}-\sqrt{a+b} & \\
2a-\sqrt{a}+2\sqrt{a+b} & \\
\hline
2a^2+2a\sqrt{a}-2a\sqrt{a+b} & \\
\quad -a\sqrt{a} & -\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2+ab}\\
\quad +2a\sqrt{a+b} & +2\sqrt{a^2+ab}-2a-2b\\
\hline
2a^2+a\sqrt{a} & -\sqrt{a^2}+3\sqrt{a^2+ab}-2a-2b.
\end{array}$$

riducendo viene

$$2a^2+a\sqrt{a}-3a-2b+3\sqrt{a^2+ab}.$$

DIVISIONE.

128. *Per dividere due radicali, si riducono allo stesso indice, e poscia eseguesi la divisione al solito.*

Così $\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[p]{b^q}=a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{q}{p}}=a^{\frac{mp}{np}}:b^{\frac{nq}{np}}=(a^{mp}:b^{nq})^{\frac{1}{np}}=$

$$\left(\frac{a^{mp}}{b^{nq}}\right)^{\frac{1}{np}}=\sqrt[np]{\frac{a^{mp}}{b^{nq}}}.$$

Esempio.

$$\begin{array}{l|l}
\textit{Dividendo} & \textit{Divisore} \\
2a^2-2a+12\sqrt{ab}-18.b & a+\sqrt{a}-3\sqrt{b} \\ \cline{2-2}
-2a^2-2a\sqrt{a}+6a\sqrt{b} & 2a-2\sqrt{a}+6\sqrt{b} \text{ quoz.} \\ \cline{1-1}
-2a\sqrt{a}-2a+6a\sqrt{b}+12\sqrt{ab}-18b & \\
+2a\sqrt{a}+2a \qquad -6\sqrt{ab} & \\ \cline{1-1}
\qquad 6a\sqrt{b}+6\sqrt{ab}-18b & \\
\qquad -6a\sqrt{b}-6\sqrt{ab}+18b & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\textit{Dividendo} & \textit{Divisore} \\
6a-\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2} & 2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b} \\ \cline{2-2}
-6a+9\sqrt[6]{a^3b^2} & 3\sqrt{a}+4\sqrt[3]{b} \text{ quoz.} \\ \cline{1-1}
\qquad 8\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2} & \\
\qquad -8\sqrt[6]{a^3b^2}+12\sqrt[3]{b^2} & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

RADICE.

Esempio.

$$\sqrt[3]{\left[(a-2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b})(2a+3\sqrt{a}-4\sqrt[3]{b})\right]}=$$
$$\sqrt[3]{\left[2a^2-a\sqrt{a}+2a\sqrt[3]{b}-ba+17\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}\right]}$$

Esempio.

$$\sqrt[n]{\left[\sqrt[p]{a^q}\right]}=\sqrt[n]{a^{\frac{q}{p}}}=\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{q}{np}}=a^{\frac{\frac{q}{n}}{p}}=\sqrt[p]{a^{\frac{q}{n}}}.$$

cioè *la radice di un radicale, si estrae dividendo l'espo-*

nente della quantità che sta sotto il radicale per l' indice della radice, o moltiplicando l' indice del radicale per la radice.

Esempio.

$$\sqrt[n]{\left[\sqrt[m]{\left(\sqrt[p]{a}\right)}\right]}=\sqrt[n]{\left[\sqrt[mp]{a}\right]}=\sqrt[mnp]{a}\;.$$

$$\sqrt[4]{\left[\sqrt[3]{a^2}\right]}=\sqrt[12]{a^2}\;....\;\sqrt[3]{\left[\sqrt[4]{\left[\sqrt[2]{a}\right]}\right]}=\sqrt[24]{a}....$$

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA.

129. Poichè nelle estrazioni delle radici quadrate dell' espressioni algebriche accade spesso di estrarre la radice de' coefficienti numerici, quindi si ragionerà prima della estrazione della radice de' numeri, dappoi faremo a parlare delle radici quadrate delle quantità algebriche.

130. Fia di mestier osservare ch' essendo il quadrato di **1** eguale ad **1**; e quello di **10** eguale a **100**, così la radice quadrata di un numero che è formato di due cifre dev' essere di una cifra. Similmente il quadrato di **10** è **100**, quello di **100** è **10000**, onde la radice quadrata di un numero che costa di quattro cifre non potrà essere che di due cifre: e generalmente si può stabilire che dato un numero si conoscerà immediatamente quante cifre contiene la sua radice. Per esempio la radice di 97 costerà di una cifra, quella di 583 di due cifre, quella di 13474 di tre cifre ec. *Ossia dividendo il numero da destra a sinistra in classi ognuna delle quali contenga due cifre, quante sono tali classi, altrettanto sarà il numero delle cifre nella radice.*

Il numero 734384 diviso in classi di due cifre ne dà tre, cioè **73,43,84** percui la sua radice sarà di tre cifre. L' estrarre la radice da 576, dovranno aversi due numeri. Si faccia $a^2+2ab+b^2=576$, e siccome 576 si suppone un quadrato, così dovrà essere eguale al quadrato della prima parte più il doppio prodotto della prima per la seconda: più il quadrato della seconda parte. Ma $576=500+76$ quindi **500** corrisponderà ad a^2, con qualche avanzo, il quale insieme a 76 corrisponderà a $2ab+b^2$.

Il più gran quadrato che sta in 500 è **400**, onde $a^2=400$ ed $a=20$ ossia $a=2$ decine: indi $2ab+b^2=100+76=176$:

dunque 176 conterrà il doppio prodotto della prima parte per la seconda ; ma la prima parte è 2 decine, quindi dividendo 176 pel doppio di 2 decine ossia per 4 decine dovranno aversi le unità o sia la seconda parte; dunque 176 diviso per 40 dà 4 unità ch'è la seconda parte della radice o le unità : dunque togliendo da 176, il doppio prodotto di 20 per 4, ed il quadrato di 4 rimane zero: vale a dire 24 è la radice esatta di 576.

Esponendo la regola si ha

```
            5,76 | 24 radice
            4    |
   44 |    17,6  |
    4 |    17 6
          ------
           0  0
```

44×4 è il doppio prodotto di 2 decine per 4 unità più il quadrato di 4 unità.

Similmente

```
            92,16 | 96 radice
            81    |
  186 |    111,6  |
    6 |    111 6  |
          -------
           0 0 0
```

Sia

```
          1,04,10,12,07 | 10202 radice
          1             |
   20 |    04           |
    0 |    0            |
   202 |   41,0         |
     2 |   40 4         |
                61,2    |
  2040          00 0
     0          61 207
  20402         40 804
      2 |          403 residuo
```

La radice del dato numero è 10202 col residuo 403. Per avere una pruova si faccia il quadrato di 10202 e si aggiunga il residuo 403, una tal somma dev'essere eguale al dato numero.

131. Allorchè il numero dato è un quadrato perfetto la sua radice dev' essere esatta: quando poi nella operazione vi è un residuo è segno evidente che il dato numero è un quadrato imperfetto; ed affinchè l'approssimazione giunga alle parti decimali, a destra del numero si aggiungono tante coppie di zeri per quante parti decimali si vogliono nella radice: così se l'approssimazione si vuole fino alle decime, si scrivono a destra del numero due zeri, se l'approssimazione si vuole fino alle centesime si aggiungono al numero quattro zeri, e così in seguito.

Estrarre la radice quadrata da 12,5 fino alle parti millesime

	12,50,00,00	3,535
	9	
65	35,0	
5	32 5	
703	250,0	
3	210 9	
7065	3910,0	
5	3532 5	
	377 5	

Dunque la radice quadrata di 12,5 è 3,535 col residuo 3775 diecimillesimi: ossia $\sqrt{12{,}5}=3{,}535$ circa.

Estrarre la radice di $\frac{5}{7}$: sarà $\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{35}{49}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{35}}{7}=\frac{1}{7}\sqrt{35}$; ma

	35,00	5,9
	25	
109	100,0	
9	98 1	
	0 19	

quindi

$\frac{1}{7}\sqrt{35}=\frac{1}{7}\times 5{,}9=0{,}84$ circa, dunque 0,84 è la radice quadrata di $\frac{5}{7}$.

Col medesimo processo si estrae la radice quadrata di qualunque fratto.

132. Estrarre da $24a^2b^3c+16a^4c^2+9b^2$ la radice quadrata. Essendo questa espressione un trinomio la sua radice (§. 108) dev' essere un binomio.

Si ordina la data quantità per una lettera, per esempio per a, e si avrà $16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^2$: in conseguenza $16a^4c^2$ dovrà essere il quadrato del primo termine del binomio, $2a^2b^3c$ il doppio prodotto della prima per la seconda parte; e $9b^2$ dovrà esprimere il quadrato della seconda parte. Dopo di ciò la regola si dispone nel modo che segue.

$$
\begin{array}{l r|l}
 & 16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^2 & 4a^2c+3b^3 \\
 & -16a^4c^2 \qquad\qquad\qquad\quad & \\
\hline
8a^2c+3b^3 & +24a^2b^3c+9b^2 & \\
\quad\;\; 3b^3 & -24a^2b^3c-9b^2 & \\
\hline
 & 0 \qquad 0 \quad &
\end{array}
$$

Sia

$$
\begin{array}{l l}
 & \quad\qquad\qquad | \; 4a^2-5ab+8bc \;\; \textit{Radice.} \\
 & 16a^4-40a^3b+23a^2b^2+64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^2. \\
 & -16a^4 \\
\hline
8a^2-5ab & -40a^3b+25a^2b^2+64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^2 \\
\quad\; -5ab & +40a^3b-25a^2b^2 \\
\hline
8a^2-10ab+8bc & \qquad\qquad\qquad +64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^2 \\
\qquad\qquad +8bc & \qquad\qquad\qquad -64a^2bc+80ab^2c-64b^2c^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0
\end{array}
$$

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA.

133. Siccome nella estrazione della radice cubica di una espressione algebrica si deve primieramente estrarre la radice cubica de' coefficienti numerici, così accenneremo il modo di estrarre la radice dei numeri.

134. È da osservarsi che essendo 1 il cubo di 1, e 1000 il cubo di 10, percui la radice cubica di un numero di una in tre cifre dovrà esser composta di una cifra. Similmente il cubo di 10 è 1000, quello di 100 è 1000000, onde la radice cubica di un numero di quattro in sette cifre deve costare di due in tre cifre: in generale si può stabilire che dato un numero si conoscerà immediatamente il numero delle cifre della sua radice cubica. Per esempio la radice cubica

di 87 è di una cifra, quella di 842 è di una cifra, quella di 1742 è di due cifre; ossia, *dividendo il numero da destra a sinistra in classi ciascuna di tre cifre, quante classi si avranno, altrettante saranno le cifre della radice*: Per esempio la radice cubica di 1745343 costa di tre cifre, perchè questo numero diviso in classi dà 1,745,343.

Estrarre la radice cubica di 262144.

La radice dovrà contenere due cifre per ciò che si è detto: questo numero supponendosi un cubo, dovrà essere eguale al cubo della prima parte, più il triplo quadrato della prima per la seconda, più il triplo quadrato della seconda per la prima, e più il cubo della seconda parte, onde sia $a+b$ la radice, sarà $262144=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; ma $262144=262000+144$; quindi 262000 corrisponderà ad a^3, con qualche residuo, il quale unito a 144 dovrà corrispondere a $3a^2b+3ab^2+b^3$. Il più gran cubo che si contiene in 262000 è 216000, in conseguenza $a^3=216000$, ed $a=60$ ovvero $a=6$ decine: indi $3a^2b+3ab^2+b^3=46000+144=46144$; dunque 46144 conterrà il triplo quadrato di 6 decine moltiplicato per le unità: dunque diviso esso pel triplo quadrato di 6 darà le unità, cioè 46144 diviso per $3.60^2=10800$: ovvero mettendo 108 per divisore, e 461,44, per dividendo si avrà 4 che sarà la seconda parte della radice: da 46144 tolto $3\times60^2\times4+3\times4^2\times60+4^3=10800+2880+64=46144$ rimane zero, perciò 64 è la radice cubica esatta del proposto numero.

Esponendo la regola si ha

$$\begin{array}{rr|l} & 262,144 & 64 \\ & 216 & \\ 3.6^2 = 108 & 461,44 & \\ 3.6^2+3.4^2.6+4^3 = & 461,44 & \\ & 0\quad 0 & \end{array}$$

Infatti

$$\begin{array}{r} 64 \\ 64 \\ \hline 256 \\ 384 \\ \hline 4096 \\ 64 \\ \hline 16384 \\ 24576 \\ \hline 262144 = 64^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & R.\ 341 \\ C.\ .\ . & 39,651,821 \\ & 27 \\ 3.3^2=27 \mid .\ .\ . & 126 \\ 4 & 108 \\ & 185 \\ & 144 = 3.4^2.3 \\ & 411 \\ & 64 = 4^3 \\ 3.34^2 = 3468 & 3478 \\ & 3468 \\ & 102 = 3.34.1^2 \\ & 102 \\ & 0001 \\ & 1 = 1^3. \\ & 0 \end{array}$$

Sia il numero 39651821 si fa il seguente quadro

Diviso C in membra di tre cifre, si scrive 3 in R per radice del massimo cubo contenuto nel primo membro col resto 12: si unisce al 12 la prima cifra 6 del secondo mem-

bro, e triplicato il quadrato della radice 3, si divide 126 per 27, il che dà 4 per radice col resto 18: si unisce pure a 18 l'altra cifra del secondo membro, e se ne toglie il triplo del quadrato di 4 moltiplicato per la radice 3: si abbassa la terza cifra 1 accanto al resto 41 e se ne toglie il cubo di 4: dopo si tratta la radice 34 come una sola cifra, e si ricomincia la operazione: e se il dato numero non sia cubo, si farà uso delle parti decimali, aggiungendo de' terni di zeri al resto, e distinguendo altrettanti decimali alla radice.

Estrarre la radice cubica di $\frac{2}{3}$, sarà

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2.3^2}{3.3^2}}=\sqrt[3]{\frac{18}{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}=\frac{2,62}{3}=0,87.$$

Si potrebbe operare altresì nel modo seguente.

Si riduce a decimale $\frac{2}{3}$ e si ha $\frac{2}{3}=0,666667$, e $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=$ $\sqrt[3]{0,666667}=0,87$. Un tal metodo conduce allo stesso risultamento del precedente: conviene però sostituire alla frazione un numero di decimali triplo di quello che si vogliono nella radice.

135. Estrarre del polinomio

$$\begin{array}{l|l|l}
 & 27a^3-54a^2b+36ab^2-8^3 & \textit{Radice cubica} \\
 & -27a^3 & 3a-2b \\
\hline
27a^2 & -54a^2b+36ab^2-8b^3 & \\
 & +54a^2b-36ab^2+8b^3 & \\
\hline
 & 0 \quad\; 0 \quad\; 0 &
\end{array}$$

Spiega. Si estrae la radice cubica del 1.° termine $27a^3$, essa è $3a$, che si scrive a destra del cubo dato, si elevi $3a$ a cubo, e si ha $27a^3$, che tolto dall'intero cubo il resto è $-54a^2b+36ab^2-8b^3$. Si forma il quadrato di $3a$, e se ne prende il triplo, e si ha $27a^2$, e per questa quantità si divide il primo termine $-54a^2b$ del primo residuo, e si ha per quoziente $-2b$ che si scrive in radice. In seguito si fa il prodotto del triplo quadrato di $2b$ per $3a$, e si ha $36ab^2$,

e finalmente il cubo di $-2b$ che è $-8b^3$, e sottratti questi tre termini dal primo residuo, il secondo residuo è zero

Dunque

$$\sqrt[3]{(27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3)}=3a-2b.$$

136. Essendo il quadrato di $+a$, a^2, e quello di $-a$ anche a^2: se ne conchiude che la radice di un quadrato positivo può essere positiva e negativa: perciò $\sqrt{a^2}=\pm a$: tanto $+a$, che $-a$ elevata a quadrato riproduce $+a^2$.

Se poi si dovesse estrarre la radice di un quadrato negativo, come di $-a^2$, si avrebbe una radice che diciamo immaginaria; perciocchè se supponiamo che la cercata radice fosse $+a$ questa elevata a quadrato dà a^2, ma il dato quadrato è a^2, dunque $+a$ non è radice: di $-a^2$: sia $-a$ la cercata radice, se ciò è vero il quadrato di $-a$ è $+a^2$: dunque neppure $-a$ è la radice del dato quadrato $-a^2$: in conseguenza nè $+a$ nè $-a$ potrà essere radice di $-a^2$: ossia la radice quadrata di una quantità negativa non sarà nè positiva nè negativa; perciò la diciamo immaginaria: val quanto dire: non può assegnarsi. Intanto di siffatte radici se ne può indicare il corrispondente simbolo: in fatti $\sqrt{-a^2}=\sqrt{a^2\times-1}$: ma di a^2 se ne può estrarre la radice ch'è $\pm a$ dunque $\sqrt{-a^2}=\pm a\sqrt{-1}$: l'espressione $\sqrt{-1}$ esprime che la radice di $-a^2$ è immaginaria. In conchiusione di questo paragrafo è da stabilirsi che *le quantità negative hanno per radici quadrate quantità immaginarie.*

Allorchè da una quantità positiva se n'estrae la radice quadrata, siffatta radice, come si è detto, può essere positiva o negativa; ossia sarà reale. Se nel fare la estrazione suddetta la radice non risulta esatta, essa si dirà quantità *irrazionale*, o *sorda*, o pure *incommensurabile*.

COMPIERE IL QUADRATO IMPERFETTO.

137. Si vede che x^2+px non è un quadrato perfetto, perciocchè è formato di soli due termini, cioè del quadrato della prima parte e del doppio prodotto della prima per la seconda parte: la prima parte, com'è chiaro, è x, px sarà il doppio prodotto della prima per la seconda, dunque p esprime il doppio della seconda, in conseguenza $\frac{1}{2}p$ sarà la se-

conda parte, e le due parti del quadrato compiuto saranno $x+\frac{1}{2}p$; ma $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=x^2+px+\frac{1}{4}p^2$; dunque alle parti x^2+px aggiungendo $\frac{1}{4}p^2$ si verrà a formare un quadrato perfetto. Ossia che *per formare un quadrato allora-quando sono dati i suoi due primi termini, si prende la metà del coefficiente del secondo termine e si eleva a quadrato si aggiunge ne' due termini dati, si avranno tre termini che saranno un quadrato perfetto.*

Esempio

Compiere il quadrato imperfetto a^4-2ba^2, la metà di $2b$ è b il quale elevato a quadrato dà b^2, dunque $a^4-2ba^2+b^2$ è un quadrato perfetto cioè di a^2-b, infatti $(a^2-b)^2=a^4-2a^2b+b^2$.

EQUAZIONI DEL SECONDO GRADO.

138. L'equazione $x^2\pm p=0$ che costa di due termini, cioè del quadrato della incognita e del termine noto, dicesi equazione del secondo grado *pura*.

Se fosse $x^2-p=0$, si avrebbe $x^2=p$, e $x=\pm\sqrt{p}$, ossia $x=+\sqrt{p}$, ed $x=-\sqrt{p}$; $+\sqrt{p}$, e $-\sqrt{p}$ si dicono le *radici* della data equazione, cioè la radice positiva e la negativa. Tanto $+\sqrt{p}$ che $-\sqrt{p}$ soddisfano alla detta equazione; in fatti eseguendo le sostituzioni viene

$$(+\sqrt{p})^2-p=o\text{ , e }(-\sqrt{p})^2-p=o\text{ , ossia }\left(+p^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$-p=o\text{ , }\left(-p^{\frac{1}{2}}\right)^2-p=o\text{ , e }p-p=0\text{ , e }p-p=o\text{ ,}$$

cioè $+\sqrt{p}$, e $-\sqrt{p}$ rendono l'equazione proposta eguale a zero.

Se poi $x^2+p=0$ sarà $x=\pm\sqrt{-p}$: quindi $x=+\sqrt{-p}$ ed $x=-\sqrt{-p}$ saranno le radici della equazione $x^2+p=0$: ma siccome sotto il segno $\sqrt{\ }$ esiste una quantità negativa così i valori di x saranno immaginari (§. 136).

Cioè, *quando il termine noto di una equazione pura del secondo grado, ridotta eguale a zero è negativo, le radici saranno reali, eguali, e di segno contrario. Quando poi il termine noto è positivo, le radici saranno immaginarie, eguali, e di segno contrario.*

Esempî

$3x^2+4-7x^2=x^2-30$ sarà
$3x^2-7x^2-x^2=-30-4$ e

$5x^2=34$, ed $x=\pm\sqrt{\frac{34}{5}}$, cioè

$$x=+\sqrt{\frac{34}{5}} \text{ ed } x=-\sqrt{\frac{34}{5}}.$$

Sia $x+\frac{a}{x}-3bx=ax+c^2x$ liberando da fratti viene

$x^2+a-3bx^2=ax^2+c^2x^2$, e
$x^2-3bx^2-ax^2-c^2x^2=-a$, da cui
$x^2(1-3b-a-c^2)=-a$,

$$x^2=\frac{-a}{1-3b-a-c^2}=\frac{a}{3b+a+c^2-1} \text{ ed}$$

$$x=+\sqrt{\frac{a}{3b+a+c^2-1}},\ x=-\sqrt{\frac{a}{3b+a+c^2-1}};$$ que-

ste radici saranno reali se $\frac{a}{3b+a+c^2-1}$ è positivo, se poi questo fratto è negativo tali radici saranno immaginarie.

139. L'equazione $x^2\pm px\pm q=o$ indica una equazione di secondo grado, la quale dicesi *affetta*, cioè a dire che contiene la prima, e la seconda potenza della x, ed il termine noto. Da tale equazione ne derivano le quattro

$$x^2+px-q=0$$
$$x^2-px-q=0$$
$$x^2+px+q=0$$
$$x^2-px\pm q=0.$$

Facciamoci a risolvere la

$$x^2+px-q=0$$

La quale dicesi equazione *ridotta*, cioè che è ordinata secondo le potenze di x, il primo termine ha per coefficiente l'unità, ed essa è eguale a zero. Da ciò si ha

$$x^2+px=q.$$

Siccome il primo membro è un quadrato imperfetto: per renderlo perfetto conviene prendere $\frac{1}{2}p$ ed elevarlo a quadrato (§. 137) che dà $\frac{1}{4}p^2$: dunque

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2.$$

Ma il primo membro è il quadrato di $x+\frac{1}{2}p$, in conseguenza

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=q+\frac{1}{4}p^2.$$

o pure

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2}=\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}, \qquad \text{e}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)=\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

Infine i valori della x verranno

$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

Siffatti valori soddisfano ambidue alla equazione stabilita. Infatti dal primo valore si ha

$$x^2=\frac{1}{4}p^2-p\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}+q+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{2}p^2-p\sqrt{1+p^2}+q$$

$$px=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{1}{2}p^2+p\sqrt{1+p^2}.$$

$$-q=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-q$$

Sommando i primi, ed i secondi membri viene $x^2+px-q=0$: val quanto dire il primo valore della x riduce a zero la equazione proposta. Del pari si dimostra che l'altro valore della x soddisfa ad essa equazione. Sommando

$$-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2} \text{ con } -\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

si ha $-p$: questo significa che *la somma delle radici pareggia il coefficiente del secondo termine col segno cambiato.*

Moltiplicando dette radici fra loro viene

$$\left[-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}\right]\left[-\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}\right]=$$

$$\left[-\frac{1}{2}p+\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[-\frac{1}{2}p-\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]:$$

eseguendo il calcolo avremo

$$\begin{array}{rl}
-\frac{1}{2}p+ & \left(q+\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
-\frac{1}{2}p- & \left(q+\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\hline
+\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}p\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{1}{2}} & \\
+\frac{1}{2}p\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(q+\frac{1}{4}p^2\right) & \\
\hline
0 \quad\quad 0 \quad\quad -q. &
\end{array}$$

Da ciò conseguita che *il prodotto delle radici è eguale all' ultimo termine dell' equazione ordinata, e ridotta.*

Del pari le radici di

$$x^2-px-q=o$$

saranno

$$x=\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$x=\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

quelle di $x^2+px+q=0$ sono

$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$$

$$x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$$

Infine le altre di

$$x^2-px+q=o$$

vengono

$$x=\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$$

$$x=\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

140. Allorchè nel radicale esiste il q negativo, si possono dare tre casi: cioè quando $\frac{1}{4}p^2$ è eguale a q il radicale si riduce a zero, ed il valore di x sarà un solo cioè $x=\frac{1}{2}p$ parlando delle due ultime, o $x=-\frac{1}{2}p$ se si tratta delle due penultime: cioè *nel caso che nella data equazione il termine noto sia positivo ed eguale al quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, le radici si riducono ad una sola.*

Se poi $\frac{1}{4}p^2$ è maggiore di q le radici saranno reali. Ossia *allorchè il termine noto è positivo ed è minore del quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, le radici della equazione saranno reali.*

Finalmente se $\frac{1}{4}p^2$ è minore di q le radici saranno immaginarie: percui *quando la data equazione ordinata ha l'ultimo termine positivo, le radici saranno immaginarie quando risulta il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine minore del termine noto.*

141. È da notarsi che (§. 139) essendo

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=q+\frac{1}{4}p^2$$

ed estraendo la radice d'ambi i membri viene (§. 136)

$$\pm\left(x+\frac{1}{2}p\right)=\pm\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)}$$

da questa nascono le quattro

$$x+\frac{1}{2}p=\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$x+\frac{1}{2}p=-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$-x-\frac{1}{2}p=\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$-x-\frac{1}{2}p=-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

dalle quali

$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

Da ciò rilevasi che le radici in apparenza sembrano quattro, ma realmente non sono che due sole.

142. Da quello dichiarato antecedentemente si può conoscere la natura delle radici di una equazione di secondo grado prima di risolverla.

Sia $x^2-4x+3=0$

Primieramente, essendo il termine noto positivo le radici possono essere immaginarie, ma quì sono reali, perciocchè la metà di -4 è -2 il quadrato n'è 4, numero maggiore di 3 (§. 140).

Ciò posto, poichè il prodotto delle radici è $+3$ esse potranno essere o tutte e due positive, o tutte e due negative: ma la lor somma è eguale a $+4$ (§. 139) quindi esse saranno tutte e due positive.

Sia $x^2-4x-3=0$, le radici di questa equazione dovranno essere reali perchè l'ultimo termine è negativo. Inoltre il loro prodotto è negativo perchè eguale a -3, dunque esse saranno di segno diverso: ma la lor somma è $+4$ dunque la positiva supera la negativa.

143. Sia l'equazione $2x^2+12x-10=0$, e

$$x^2+6x-5=0$$

Le radici di questa equazione sono reali, una positiva e l'altra negativa, e la negativa supera la positiva. Per rinvenirle, si ha in primo

$$x^2+6x+3^2=3^2+5: \text{ o}$$
$$x^2+6x+9=9+5, \text{ e}$$
$$(x+3)^2=14; \text{ e}$$
$$x+3=\pm\sqrt{14} \text{ da cui}$$
$$x=-3+\sqrt{14}=-3+3,7=+0,7$$
$$x=-3-\sqrt{14}=-3-3,7=-6,7.$$

Si può la medesima equazione risolvere, paragonata alla equazione generale: così

$$x^2+6x-5=0$$

paragonata con $x^2+px+q=0$ le cui radici sono,

$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$$

$$x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

si ha $p=6$, $q=-5$: onde

$$x=-\frac{1}{2}.6+\sqrt{\frac{1}{4}.6^2+5}=-3+\sqrt{14}$$

$$x=-\frac{1}{2}.6-\sqrt{\frac{1}{4}6^2+5}=-3-\sqrt{14}.$$

Sia

$$\frac{mx^2}{n}+ax-b^2x+c=dx^2-gx+pq.$$

avremo

$$\frac{m}{n}x^2 - dx^2 + ax - b^2x + gx = pq - c\,,$$

$$\left(\frac{m}{n} - d\right)x^2 + (a - b^2 + g)\,x = pq - c\,,$$

$$\frac{m-d}{n}x^2 + (a - b^2 + g)\,x = pq - c\,, \text{ e}$$

$$(m-d)\,x^2 + (a - b^2 + g)\,nx = (pq - c)\,n$$

$$x^2 + \frac{(a - b^2 + g)\,n}{m-d}x = \frac{(pq-c)n}{m-d},\; x^2 + \frac{(a-b^2+g)n}{m-d}x +$$

$$\frac{(a - b^2 + g)^2 n^2}{4(m-d)^2} = \frac{(pq+c)\,n}{m-d} + \frac{(a - b^2 + g)^2\,n^2}{4(m-d)^2} : \text{ e}$$

$$\left(x + \frac{(a - b^2 + g)n}{2(m-d)}\right)^2 = \frac{(pq+c)\,n}{m-d} + \frac{(a - b^2 + g)^2 n^2}{4(m-d)^2}$$

estraendo la radice

$$x + \frac{(a - b^2 + g)\,n}{2(m-d)} = \pm\sqrt{\frac{(pq+c)n}{m-d} + \frac{(a-b^2+g)^2 n^2}{4(m-d)^2}}$$

i valori di x saranno

$$x = -\frac{(a + b^2 + g)n}{2(m-d)} + \sqrt{\frac{(pq+c)\,n}{m-d} + \frac{(a-b^2+g)^2 n^2}{4(m-d)^2}}$$

$$x = -\frac{(a + b^2 + g)n}{2(m-d)} - \sqrt{\frac{(pq+c)\,n}{m-d} + \frac{(a-b^2+g)^2 n^2}{4(m-d)^2}}$$

144. *Problema.* Trovare un numero x che col suo settuplo e col suo quadrato dia **144**. Dunque $x^2 + 7x = 144$. Compiuto il quadrato, si avrà

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 144 + \frac{49}{4}\,,$$

estraendo la radice e trasportando verrà

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{144 + \frac{49}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{25}{2}.$$

Il segno $+$ dà $x = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2} = 9$, il segno $-$ dà $x = -\frac{7}{2} - \frac{25}{2} = -16$. Infatti eseguendo la sostituzione di $x = 9$ risulta $9^2 + 7 \times 9 = 144$, e $81 + 63 = 144$.
Così pure con $x = -16$ si ha

$$(-16)^2 - 7 \times 16 = 144, \text{ e } 256 - 112 = 144.$$

145. *Problema.* Dividere il numero **10** in due parti il cui prodotto sia **100**.

Fatta x una delle parti cercate, sarà $10 - x$ l'altra: per la condizione del problema viene

$$(10 - x)x = 100, \text{ e}$$

$$x^2 - 10x = -100$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 100} = 5 \pm \sqrt{-75}:$$

queste radici sono immaginarie, dunque il problema è assurdo, nè si può dividere **10** in due parti che moltiplicate facciano **100**.

146. *Problema.* Un numero x di persone dee pagar ducati **342** per egual porzione. Tre non pagando, suppliscono le altre, il che importa a ciascuno ducati **19** di più. Cerco x: Si dirà, la parte di ciascuno, pagando tutti sarebbe $\frac{342}{x}$; tre non pagando la parte de' rimanenti è $\frac{342}{x-3}$; ma questa supera l'altra di **19**; dunque

$$\frac{342}{x-3} - \frac{342}{x} = 19.$$

Fatte le operazioni si trova

$$x^2 - 3x = 54; \text{ onde}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{54 + \frac{9}{4}}, \text{ ed}$$

$$x = \frac{3}{2} + \sqrt{54 + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{15}{2} = 9$$

$$x = \frac{3}{2} - \sqrt{54 + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{15}{2} = -6.$$

La prima soluzione è la cercata; la seconda è relativa ad un' altra esposizione del problema. Eran dunque 9 le persone, 6 delle quali pagando di parte ducati 57, hanno formata la somma di ducati 342. Così se tutte pagano spetta a ciascuna $\frac{342}{9}=38$: ma se pagano tre di meno ossia 6, ciascuna pagherà $\frac{342}{6}=57$: in conseguenza 57 è maggiore di 38 per 19. La radice negativa -6 serve al problema inverso, cioè: x persone debbono pagare 342 per egual porzione: sopraggiungono tre altri che pagando la lor parte, diminuiscono di 19 la porzione de' primi. Cerco x. Risolvendo il problema, si trovan le radici $+6$, e -9.

EQUAZIONI DEL SECONDO GRADO A DUE INCOGNITE.

147. Siano l'equazioni da risolversi

$$y^2+Ay+B=0\,;$$
$$y^2+Cy+D=0$$

le quantità A,B,C e D contengono un' altra incognita: dalla prima si tolga la seconda, e si avrà

$$(A-C)y+B-D=0, \text{ ed}$$

$$y+\frac{B-D}{A-C}=0\,.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

Si moltiplica questa per y che diverrà

$$y^2+\frac{B-D}{A-C}y=0$$

la quale tolta dalla prima dà

$$\left(A-\frac{B-D}{A-C}\right)y+B=0 \quad \text{e}$$

$$y+\frac{B}{A-\frac{B-D}{A-C}}=0\,.\;.\;.\;(b).$$

questa tolta da (a), n'emerge

$$\frac{B-D}{A-C}-\frac{B}{A-\frac{B-D}{A-C}}=0 \text{ : riducendo ,}$$

$$B-D-\frac{B}{A(A-C)-B+D}=0,$$

equazione che non contiene più la incognita y.

Siano l'equazioni da risolversi

$$x^2+xy-m^2=0$$
$$y^2+xy-n^2=0$$

Si divide la seconda per y sarà

$x+y-\frac{n^2}{y}=0$, moltiplicata per x dà $x^2+xy-\frac{n^2x}{y}=0$: togliendo questa dalla prima delle due date risulterà

$\frac{n^2x}{y}-m^2=0$, ed $x-\frac{m^2y}{n^2}=0$: dalla quale $x^2-\frac{m^2xy}{n^2}=0$,

tolta dalla prima sarà $xy+\frac{m^2}{n^2}xy-m^2=0$, ossia

$$n^2xy+m^2xy-m^2n^2=0, \text{ ed } x-\frac{m^2n^2}{n^2y+m^2y}=0$$

tolta questa dall'equazione da $x-\frac{m^2y}{n^2}=0$ sarà

$\frac{m^2n^2}{n^2y+m^2y^2}-\frac{m^2y}{n^2}=0$, equazione in cui non vi è x, che liberata da divisori darà

$m^2y^2+n^2y^2=n^4$, ed $y=\frac{n^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$, e perchè si ha

$$x=\frac{m^2y}{n^2} \text{ viene } x=\frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

La risoluzione di questa specie di equazioni richiede un profondo esercizio per giungere di una maniera diretta alla conoscenza de' valori delle incognite : questo metodo pertanto si estende anche ai gradi superiori al secondo.

148. *Problema.* Il numero de' ducati che posseggono, A e B è tale, che la loro somma sottratta dai loro quadrati dà 78, ma unita al lor prodotto fa 39. Si domanda il denaro di A, e quello di B.

Se si chiama x il numero de' ducati di A, ed y quelli di B, l'equazione finale risulterebbe di quarto grado, che se però la somma de' ducati di A e di B si chiama $2x$, e la differenza $2y$; l'equazione finale risulterebbe del secondo grado. E sarà $x+y$ il numero maggiore, ed $x-y$ il numero minore, e per la prima condizione sarà $(x+y)^2+(x-y)^2-2x=78$ da cui $x^2+y^2-x=39$, e per la seconda condizione $x^2-y^2+2x=39$: onde le equazioni da risolvere sono

$$x^2+y^2-\ x=39$$
$$x^2-y^2+2x=39$$

Sommando, $2x^2+x=78$, $x^2+\frac{1}{2}x=39$ ed

$$x=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{39+\frac{1}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{25}{4}.$$
$$x=-\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=6,\ x=-\frac{1}{4}-\frac{25}{4}=-\frac{13}{2}$$

la radice positiva è quella di cui ci dobbiamo avvalere.

La prima equazione con la sostituzione di $x=6$, dà

$$36+y^2-6=39.$$
$$y^2=9,\quad y=3\text{; e quindi}$$
$$A=x+y\ =6+3=9,\ B=x-y=6-3=3.$$

149. *Problema.* Si cercano due numeri tali, che il triplo del loro prodotto eguagli il doppio della loro somma, e la differenza de' loro quadrati. Sia x il più grande, y il minore de' numeri. Per la prima condizione,

$$2(x+y)=3xy\text{, per la seconda}$$
$$x^2\ -y^2=3xy\text{; onde}$$

$2(x+y)=x^2\ -y^2$ dividendo il 1.° e secondo membro per $x+y$ si ha

$$x=y+2.$$

questo valore posto nella prima dà

$$4y+4=3y^2+6y\text{ , donde}$$

$$y=-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}\text{ ed}$$

$$x=\frac{5}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}.$$

150. Dee quì osservarsi che l'equazioni di questa forma

$$x^{2m}+px^m=q$$

si risolvono come quelle del secondo grado: poichè fatta $x^m=y$ si riducono ad

$$y^2+py=q\text{ , onde}$$

$$y=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$$

che dà

$$x^m=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}\text{ , e}$$

$$x=\pm\sqrt[m]{\left[-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{1+\frac{1}{4}p^2}\right]}$$

RAGIONI E PROPORZIONI ARITMETICHE.

151. *La ragione aritmetica è il paragone di due quantità omogenee per conoscerne la differenza.* Così la ragione aritmetica di 8 e 2 è $8-2=6$, si scrive 8.2 e si pronunzia 8 sta a 2; quì i numeri debbono essere omogenei, diversamente non avrebbe luogo la sottrazione; del pari la ragione aritmetica di a, e b, si scrive $a.b$, ciò significa $a.b=a-b$; a dicesi *antecedente*, e b *conseguente* della ragione.

152. *La proporzione aritmetica è la eguaglianza di due ragioni aritmetiche.*

Per esempio: Sia $a-b=d$, e $c-f=d$, quindi le quantità a, b, c, ed f, formano una proporzione aritmetica, la quale si scrive $a.b:c.f$, e si pronunzia a sta a b, come c sta ad f; $a.b$ dicesi la prima ragione, e $c.f$ la se-

conda ragione; a ed f si dicono gli *estremi*, e b e c si dicono i *medi* della proporzione.

153. *In ogni proporzione aritmetica la somma degli estremi è eguale alla somma de' medi.*

Sia $a \,.\, b : c \,.\, f$, ciò significa $a-b=c-f$; aggiuntovi di comune $b+f$, risulta $a-b+b+f=c-f+b+f$, e riducendo si ha $a+f=c+b$, dunque ec.

154. *Quando i medi sono eguali, la proporzione dicesi continua.*

Così $a \,.\, b : b \,.\, c$, è una proporzione aritmetica continua; ma per l'antecedente paragrafo $a+c=b+b=2b$, la qual cosa significa che *la somma degli estremi è eguale al doppio del medio, nella proporzione aritmetica continua.*

155. Sia $a \,.\, b : c \,.\, x$; sarà (§. 153) $a+x=b+c$, e quindi $x=b+c-a$.

Cioè *un estremo è eguale alla somma de' medi, meno l'altro estremo.* Del pari si dimostra che *un medio è eguale alla somma degli estremi, meno l'altro medio.*

Sia $a \,.\, x : x \,.\, b$, sarà (§. 153) $2x=a+b$; ed $x=\dfrac{a+b}{2}$, ossia *il medio è eguale alla somma degli estremi divisa per* 2. *nella proporzione continua.*

156. Sia $m+q+n+p$, sarà $m-n=p-q$, e quindi $m \,.\, n : p \,.\, q$; si vede da ciò che le parti di due grandezze eguali sono in ragion inversa fra loro; cioè a dire m prima parte della prima grandezza $m+q$, sta ad n prima parte della seconda grandezza $n+p$, come p seconda parte della seconda grandezza, sta a q seconda parte della prima grandezza. *Generalmente per mettere in proporzione le parti di due grandezze eguali, bisogna mettere per estremi, o per medi, le parti della stessa grandezza.*

157. Sia $a \,.\, b : c \,.\, f$, sarà (§. 153) $a+f=b+c$, e quindi $\overline{a\pm m}+f=\overline{b\pm m}+c$; onde (§.156) $a\pm m \,.\, b\pm m : c \,.\, f$. Cioè *una ragione aritmetica non altera, aggiungendo o togliendo ad ambo i suoi termini una qualunque quantità.*

RAGIONI E PROPORZIONI GEOMETRICHE.

158. *La ragione geometrica è il paragone di due quantità omogenee, per conoscerne il quoziente*; un tal quoziente dicesi *esponente*, *quantità di ragione*, *o rapporto geometrico.*

Così la ragione geometrica di 8 e 2 è $\frac{8}{2}=4$, si scrive $8:2$, e si pronunzia 8 sta a 2; quì i numeri debbono essere omogenei, diversamente non avrebbe luogo la divisione; il numero 2 è, come è chiaro, un numero astratto; qualora nella ragione aritmetica (§. 151) il rapporto corrispondente è un numero concreto, cioè a dire indica una quantità della stessa specie dei due numeri dati.

La ragione geometrica di a e b, si scrive $a:b$, ciò significa $\frac{a}{b}$; a dicesi antecedente, e b conseguente della ragione.

159. La *proporzione geometrica è l'eguaglianza di due ragioni geometriche.*

Sia per esempio $\frac{a}{b}=q$, $\frac{c}{d}=q$; quindi le quantità a,b,c,d formano una proporzione geometrica, la quale si scrive $a:b::c:d$, e si pronunzia a sta a b, come c sta a d; $a:b$ dicesi la prima ragione; $c:d$ la seconda ragione; a, e d si dicono gli *estremi*, b, e c si dicono i *medî* della proporzione.

160. *In ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de' medî.*

Sia $a:b::c:d$, ciò significa $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; moltiplicando tutta l'equazione per bd, risulta $\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$, e riducendo si ha $ad=cb$, dunque ec.

161. *Quando i medî sono eguali la proporzione dicesi continua.*

Così $a:b::b:c$ è una proporzione geometrica continua; ma per l'antecedente paragrafo $ac=b^2$, la qual cosa significa che *il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del medio, nella proporzione geometrica continua.*

162. Sia $a:b::c:x$; sarà (§. 160) $ax=bc$, e quindi $x=\frac{bc}{a}$.

Cioè *un estremo è eguale al prodotto de' medî diviso per l'altro estremo.* Del pari si dimostra che *un medio è eguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio.*

Sia $a : x :: x : b$, sarà (§. 160) $x^2 = ab$; ed $x = \sqrt{ab}$, ossia *il medio è eguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi, nella proporzione continua.*

163. Sia $ad = bc$, sarà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; quindi $a : b :: c : d$, conseguita da ciò *che i fattori di due prodotti eguali sono in ragion inversa fra loro*, cioè a dire a, fattore del primo prodotto ad sta a b, fattore del secondo prodotto bc, come c fattore del secondo prodotto, sta a d fattore del primo.

Generalmente per mettere in proporzione i fattori di due prodotti eguali, bisogna situare per estremi, o per medi; i fattori dello stesso prodotto.

164. Sia $a : b :: c : d$ sarà (§. 159) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; e quindi $\frac{am}{bm} = \frac{c}{d}$; $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{c}{d}$, sarà $\frac{am}{bm} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$, e $am : bm :: \frac{a}{m} : \frac{b}{m} : c : d$, Cioè a dire *una ragione geometrica non altera moltiplicando, o dividendo ambo i suoi termini per una qualunque quantità.*

165. *Siano* a : b, c : d, f : g *tre ragioni eguali ed omogenee, dico che* a + c + f : *somma degli antecedenti sta* b + d + f, *somma dei conseguenti, come un antecedente* a *sta al suo conseguente* b.

Sia q il quoziente, cioè $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g} = q$, sarà $a = bq$, $c = dq$, $f = gq$, sommando $a + c + f = q(b + d + g)$,

$$\text{e } q = \frac{a+c+f}{b+d+g} \text{ cioè } \frac{a+c+f}{b+d+g} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}, \text{ e}$$

$$a + c + f : b + d + g :: a : b :: c : d :: f : g.$$

166. *Se i termini di una proporzione si moltiplichino, o si dividano rispettivamente pei termini di un' altra proporzione, ciò che ne risulta sarà pure un' altra proporzione.*

Siano le proporzioni $a:b::e:d$, e $m:n::p:q$; sarà $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ed $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$; dunque $\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{c}{d}\times\frac{p}{q}$ ossia $\frac{am}{bn}=\frac{cp}{dq}$, e quindi $am:bn::cp:dq$; inoltre $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}}=\frac{\frac{c}{d}}{\frac{p}{q}}$; ossia $\frac{an}{bm}=\frac{cq}{dp}$, e $\frac{a}{m}\times\frac{n}{b}=\frac{c}{p}\times\frac{d}{q}$, oppure $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}}=\frac{\frac{c}{p}}{\frac{d}{q}}$, e $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{p}:\frac{d}{q}$, dunque ec.

167. *Le stesse potenze de' termini di una proporzione, o le stesse radici, formano anche una proporzione.*

Sia $a:b::c:d$, sarà $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, e $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{c}{d}\right)^m$ o $\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$, da ciò $a^m:b^m::c^m:d^m$; così pure $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{n}}$, o $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, oppure $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$, da ciò $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

168. *Una ragione dicesi composta di più ragioni, quando il suo esponente è eguale al prodotto degli esponenti delle ragioni semplici*; così volendo formare la ragion composta dalle ragioni semplici $a:b$, $c:d$, $f:g$, conviene prendere gli esponenti, cioè

$\frac{a}{b}=a:b$, $\frac{c}{d}=c:d$, $\frac{f}{g}=f:g$, e moltiplicarli fra loro, ossia chiamando $m:n$ la ragion composta che si richiede, si avrà per la definizione

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{f}{g}=\frac{acf}{bdg}=\frac{(a:b)(c:d)(f:g)}{1}, \text{ oppure}$$

$$m:n::(a:b)(c:d)(f:g)=acf:bdg; \text{ cioè}$$

la ragion composta si forma con moltiplicare tutti gli antecedenti, e paragonarli al prodotto di tutti i conseguenti.

169. *Se vi siano più grandezze, la prima sta all' ultima, in ragion composta della prima alla seconda, della seconda alla terza, della terza alla quarta ec.*

Siano le grandezze a, b, c, d; avremo $\frac{a}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}$, e passando alla ragion composta si ha

$a:d::(a:b)(b:c)(c:d)$; dunque ec.

170. *Se una ragione sia composta di due ragioni, le quali siano una inversa dell' altra: dico che la ragion composta è di uguaglianza.*

Sia $m:n::(a:b)(c:d)$, e $a:b::d:c$; dico che $m=n$.

Poichè $m:n::ac:bd$; ma dalla proporzione si ha $ac=bd$ (§. 160), dunque $m=n$.

171. *Se tre grandezze* a, b, c, *siano continuamente proporzionali: dico che la prima* a, *sta all' ultima* c, *in ragion duplicata di* a : b, *o di* b:c, *ossia* $a:c::a^2:b^2$; $o::b^2:c^2$.

Poichè (§. 169) $a:c::(a:b)(b:c)$, ma per ipotesi $a:b::b:c$, sarà $a:c::(a:b)(a:b)$ o $a:c::(b:c)(b:c)$, e $a:c::a^2:b^2$, o $a:c::b^2:c^2$; dunque ec.

REGOLA DEL TRE DIRETTA.

La regola detta comunemente *del tre*, consiste a trovare un termine di una proporzione, allorchè ne siano dati tre.

Questa regola detta dagli antichi *Regola aurea*, è la base su cui poggiano infiniti problemi aritmetici.

172. *Problema.* Uomini 36 in un certo tempo, hanno consumato 136^k di carne, si domanda uomini 54 nello stesso tempo quanta carne consumeranno? Sia x il numero dei kilogrammi di carne che si cerca, e si farà

$$36 : 54 :: 136^k : x.$$

Si ragiona come segue.

36 Uomini consumano 136^k di carne, uomini 54 ne dovranno consumare di più, quindi il valore della x dovrà risultare maggiore di 136^k; ossia il conseguente della seconda ragione, dovrà risultare maggiore del suo antecedente, ma il conseguente della prima ragione è col fatto maggiore del suo antecedente, dunque la regola dovrà eseguirsi della maniera colla quale trovasi scritta.

In detta proporzione gli antecedenti sono gli uomini, ed il corrispondente consumo, ed i conseguenti sono anche gli uomini, ed il corrispondente consumo; la regola quindi dicesi *regola di tre diretta*.

Si sono posti nella prima ragione gli uomini, e nella seconda ragione le quantità di carne, per quello stabilito nella definizione (§. 158).

Sarà (§. 162) $x^k = \dfrac{54 \times 136^k}{36} = 204^k$ carne che consumeranno 54 uomini nell'istesso tempo che 36 uomini ne hanno consumato 136^k.

173. *Problema.* Si domanda quanto renderanno 1740 franchi in un anno, supponendo che 100 ne rendano 5.

Si dirà il capitale ipotetico 100^f sta al capitale reale 1740^f, come il guadagno ipotetico 5^f sta al quarto proporzionale x, che sarà il guadagno reale; quindi è $100^f : 1740^f :: 5^f : x$; quì gli antecedenti formano i numeri appartenenti allo stesso enunciato del quesito, ed i conseguenti anche alla medesima parte dell'enunciato del quesito, e facendo il raziocinio come nel paragrafo antecedente, si desume che la regola è diretta, onde $x^f = \dfrac{1740^f \times 5^f}{100^f} = 87^f{,}00$ guadagno richiesto. Una tal regola di tre, è ciò che in aritmetica dicesi *Regola d'interesse semplice*.

174. *Problema.* Una cambiale di 9000 ducati scade alla fine di un anno, cioè a dire debba esser pagata dopo un tal tempo; si domanda qual somma si dovrà sborzare ora, onde affrancare la detta cambiale alla ragione del 5 per 100 l'anno.

Si comprende bene che se la cambiale fosse di 105 ducati, per affrancarla si dovrebbero pagare al momento 100 ducati; quindi avremo

$$105 : 9000 :: 100 : x.$$

Cioè a dire 105, somma ipotetica che si dovrebbe pagare alla fine dell'anno, sta a 9000, somma da pagarsi nell'istesso tempo, realmente; come 100, somma ipotetica a cui si riduce 105 pagandosi ora, sta ad x, che sarà la somma a cui si riduce 9000 pagandosi a vista. Dalla quale proporzione si ottiene

$$x = \frac{9000 \times 100}{105} = 8571^{\text{du.}}.\ 42^{\text{gr.}}\frac{6}{7}.$$

Quindi si conchiude che tanto è ricevere alla fine dell'anno 9000 ducati, che riceverne adesso $8571.\ 42\frac{6}{7}$, rilasciando l'interesse del 5 per 100; in questo caso la regola dicesi di ***escomputo***; in conseguenza di ciò $9000^{du.} - 8571^{du.} 42^{gr.}\frac{6}{7} = 428^{du.}\ 57^{gr.}\frac{1}{7}$, che sarà lo escomputo de' ducati 9000 alla ragione del 5 per 100 l'anno.

Se la cambiale dovesse scadere dopo 7 mesi, allora l'escomputo sarà meno, ed in proporzione del tempo; cioè a dire per un anno, ossia per 12 mesi l'escomputo è di $428^{du.} 57^{gr.}\frac{1}{7}$; per 7 mesi sarà $\frac{7}{12}$ di questo; cioè

$\frac{7}{12} \times 428^{du.}.\ 57^{gr.}\frac{1}{7} = 249^{du.}, 99^{gr.}$ circa, che sarà l'escomputo di ducati, 9000, per mesi 7, alla ragione del 5 per 100 l'anno.

REGOLA DEL TRE INVERSA.

175. *Problema.* Uomini 50 fanno un lavoro in anni 6, si domanda uomini 256 in quanto tempo faranno il medesimo lavoro?

Si operi a situar la regola come sopra, ossia gli uomini stanno agli uomini, come il tempo appartenente ai primi, sta al tempo appartenente ai secondi; dunque

$$50^u : 256^u :: 6^a : x^a.$$

Bisogna, avendo stabilito in tal modo la regola, ragionare così: 50 uomini fanno un lavoro in 6 anni, 256 uomini, è chiaro, che lo eseguiranno in minor tempo, in conseguenza il quarto proporzionale x dovrà risultare minore del terzo proporzionale 6, ossia il conseguente della seconda ragione dovrà esser minore del suo antecedente, ma 256 conseguente della prima ragione, è maggiore del suo antecedente 50, quindi la prima ragione dovrà invertirsi, affinchè il valore dell'x risulti minore di 6, con ciò dovrà farsi

$$256^u : 50^u :: 6^a : x^a,$$

ed in questa maniera eseguendosi la regola del tre, il valore della x risulta precisamente minore di 6; in quest' ultima proporzione i due medi 50, e 6 contengono i dati della parte cognita del problema, e gli estremi 256, ed x contengono la parte incognita del problema, in conseguenza, in quanto alla maniera di esistere de' dati del problema, la regola da diretta che si era scritta, è divenuta *inversa*; cioè a dire i secondi uomini 256, stanno ai primi 50, come 6 tempo de' primi, sta ad x che sarà il tempo de' secondi; ed $x=\frac{50\times6^a}{256}=\frac{300^a}{256}=1\frac{11}{64}$; dunque 256 uomini faranno il medesimo lavoro in anno $1\frac{11}{64}$, valore minore di anni 6, come doveasi attendere.

La suddetta maniera di ragionare è applicabile a tutte le regole del tre, ad oggetto di conoscere se siano dirette, oppure inverse.

176. *Problema.* Acciò che sia sufficiente una provvisione di biscotto per 4 anni, la razione di ciascuno individuo è di 1^k; si domanda per far bastare la stessa provvisione per anni 7 a che dovrà ridursi la suddetta razione? Ragionando al solito in quanto alla prima parte, si ha

$$4 : 7 :: 1^k : x^k.$$

Si fa il ragionamento che segue.

Una provvigione basta per 4 anni, distribuendo ad un numero di uomini 1^k per ciascuno, per farla bastare anni 7, a che dovrà ridursi in peso la razione? È chiaro che dovrà ridursi a meno di 1^k, dunque il quarto proporzionale x dovrà venire minore di 1^k, ma 7 è maggiore di 4, dunque dovrà invertirsi la prima ragione, e si avrà

$7 : 4 :: 1^k : x=\frac{4\times1^k}{7}=\frac{4}{7}$ di kilogrammo. Per cui la provvisione basterà per 7 anni, quando la razione da 1^k si ridurrà a $\frac{4}{7}$.

REGOLA DEL TRE COMPOSTA.

177. Siano F, f due forze, o cagioni operanti, che producan gli effetti E, e nello stesso tempo; è chiaro che se F sia doppio, triplo, quatruplo ec. di f, dovrà essere l'effetto E, doppio, triplo, quatruplo ec. di e; o per meglio dire in ugual tempo le forze sono nella ragione diretta degli effetti; per cui quando il tempo $T = t$ si avrà

$$F : f :: E : e.$$

178. Siano E, e gli effetti prodotti da due forze eguali ne'tempi T, t; è evidente che se E sia doppio, triplo, quatruplo ec. di e, sarà T doppio, triplo, quatruplo ec. di t; ossia con forze eguali gli effetti sono nella ragion diretta de' tempi, dunque

$$E : e :: T : t.$$

cioè quando $F = f$.

179. Siano F, f due forze E, e gli effetti che producono nei tempi T, t. Sia e' l'effetto della forza F nel tempo t.

Delle tre grandezze E, e', e starà (§. 169)

$$E : e :: (E : e')(e' : e); \text{ ma (§. 178)}$$

$$E : e' :: T : t; \text{ ed } e' : e :: F : f;$$

in conseguenza sostituendo avremo

$$E : e :: (T : t)(F : f).$$

Cioè *gli effetti sono nella ragion composta della diretta de' tempi, e della diretta delle cagioni operanti, ossia forze.*

Dall' ultima ragion composta si ritrae

$$F : f :: (E : e)(t : T).$$

Conseguita da ciò, che *le forze sono nella ragion composta della diretta degli effetti, e della inversa de' tempi.*

Infine si ottiene

$$T : t :: (E : e)(f \cdot F).$$

Dunque *i tempi sono nella ragion composta della diretta degli effetti, e della inversa delle forze.*

Per applicare questi teoremi ai quesiti aritmetici, diamo gli esempî.

180. *Problema.* 36 uomini in 2 mesi lavorano 1200[l] di ferro, si domanda 50 uomini in 5 mesi quanto ferro lavoreranno?

In questo caso sono note le forze, i tempi, e l'effetto delle prime forze; si cerca dunque l'effetto delle seconde forze, cioè il ferro che lavoreranno i 50 uomini, che chiamo x.

Pel (§. 179) si ha $F=36^u, f=50^u, T=2^m, t=5^m, E=1200^k, e=x^k$, perciò

$$1200^k : x^k :: (36^u : 50^u)(2^m : 5^m).$$

In conseguenza (§. 168.)

$$1200^k : x^k :: 36\times2 : 50\times5, \text{ oppure}$$
$$1200^k : x^k :: 72 : 250,$$
$$x=\frac{250}{72}\times1200^k.=4166^k\frac{2}{3}$$

lavoro richiesto.

181. Per operare in altro modo si scrive la regola come

segue $\left.\begin{matrix}36^u : 50^u\\ 2^m : 5^m\end{matrix}\right\} :: 1200^k : x.$

si ragiona così.

Uomini 36 in un certo tempo fanno un lavoro di 1200^k, 50 uomini nello stesso tempo dovranno fare un lavoro maggiore; quindi x dovrà venire maggiore di 1200^k, ma 50 è maggiore di 36, dunque la prima ragione è diretta, cioè a dire sta bene scritta.

Similmente in 2 mesi si fanno da un certo numero di uomini 1200^k, in 5 mesi dallo stesso numero di uomini se ne dovrà fare un numero maggiore; quindi x dovrà venire maggiore di 1200^k, ma è pure l'espressione 5 mesi maggiore di 2 mesi, dunque la seconda ragione è anche diretta.

Ma la ragion composta si esegue dal prodotto degli antecedenti paragonato a quello de' conseguenti (§. 168) dunque si ottiene

$36\times2 : 50\times5 :: 1200^k : x^k$; cioè precisamente come sopra.

182. *Problema.* 80 Travagliatori, travagliando 9 ore per giorno in un terreno di 7 gradi di durezza, han cavato un fosso in 15 giorni; si domanda 150 travagliatori travagliando 8 ore per giorno in un terreno di 5 gradi di durezza, per cavare il medesimo fosso, quanti giorni impiegheranno?

Disponendo la regola come sopra, si ottiene,

$$\left.\begin{matrix}80^u : 150^u\\ 9^{ore} : 8^{ore}\\ 7^{dur} : 5^{dur}\end{matrix}\right\} :: 15^g : x.$$

cioè i tempi sono nella ragion composta de' dati del problema; conviene fare il ragionamento per stabilire quali sieno le ragioni dirette, e quali le inverse.

Così, 80 uomini fanno un lavoro in 15 giorni, 150 uomini lo faranno in minor tempo, quindi x dovrà risultare minore di 15, ma 150 è maggiore di 80, dunque la prima ragione dovrà invertirsi. Inoltre un numero di uomini travagliando 9 ore al giorno fa un lavoro in 15 giorni, gli stessi uomini lavorando 8 ore al giorno dovranno fare il medesimo lavoro in più giorni, quindi x dovrebbe venire maggiore di 15, ma 8 è minore di 9, perciò la seconda ragione dovrà anche invertirsi. Infine quando il terreno ha 7 gradi di durezza un lavoro si esegue in 15 giorni, se poi il terreno ha 5 gradi di durezza, il lavoro si eseguirà in minor tempo, ossia x dovrà venire minore di 15, ma 5 è minore di 7, dunque quest' ultima ragione rimane diretta. Operando i corrispondenti cambiamenti si avrà

$$\left.\begin{array}{r}150 : 80 \\ 8 : 9 \\ 7 : 5\end{array}\right\} :: 15^g : x,$$

ed eseguendo la ragion composta (§. 168) avremo

$$150 \times 8 \times 7 : 80 \times 9 \times 5 :: 15^g : x;$$

onde $8400 : 3600 :: 15^g : x$, e quindi $x = \frac{3600}{8400} \times 15^g =$

$$\frac{3}{7} \times 15 = \frac{45^g}{7} = 6^g \, \frac{3}{7}.$$

Cioè a dire il lavoro suddetto sarà eseguito in giorni 6 e $\frac{3}{7}$.

REGOLA DI SOCIETÀ.

La regola di *società*, o di compagnia ha per oggetto di dividere un dato guadagno, o una data perdita, in proporzione de' capitali che s'impiegano nel negozio; o che vale lo stesso, ha per oggetto di dividere un numero in parti proporzionali a de' numeri dati. La dimostrazione di siffatta regola trovasi nel (§. 93).

183. *Problema*. Tre negozianti *A, B, C,* han posto in negozio rispettivamente le somme di ducati **1340**, **2500**, **3450**,

ed han guadagnato ducati 900. Si domanda il guadagno di ciascuno in proporzione del capitale impiegato.

Si dovranno sommare i tre numeri 1340, 2500, e 3450 i quali danno 7290 (§. 93), indi si dovranno stabilire le tre proporzioni

$$7290 : 1340 :: 900 : A$$
$$7290 : 2500 :: 900 : B$$
$$7290 : 3450 :: 900 : C.$$

Cioè si è detto, che la somma de' tre capitali sta al capitale di ciascuno, come il guadagno totale sta al quarto proporzionale che sarà il guadagno di ciascuno.

La prima proporzione dà

$$A = \frac{1340}{7290} \times 900^{d} = D^{ti}\ 165\ \frac{315}{729}$$
$$B = \frac{2500}{7290} \times 900^{d.} = 308\ \frac{468}{729}$$
$$C = \frac{3450}{7290} \times 900^{d.} = 425\ \frac{675}{729}$$
$$\overline{900\ \text{»}}$$

I tre quarti proporzionali suddetti, indicheranno la porzione del guadagno di ciascun negoziante. Quando bene si è operato, questi medesimi guadagni sommati insieme debbono dare il guadagno totale.

Se rimanendo fermi i dati suddetti, si aggiungesse che il negoziante A è stato in negozio anni 3, il negoziante B anni 2, ed il negoziante C anni 7, allora il guadagno 900 si dovrebbe dividere nella ragione de' tre numeri $1340 \times 3 = 4020$, $2500 \times 2 = 5000$, $3450 \times 7 = 24150$; prodotti de' tre capitali pei rispettivi tempi. In conseguenza i tre quarti proporzionali sarebbero

$$A = \frac{1340 \times 3}{4020 + 5000 + 24150} \times 900.$$
$$B = \frac{2500 \times 2}{4020 + 5000 + 24150} \times 900.$$
$$C = \frac{3450 \times 7}{4020 + 5000 + 24150} \times 900.$$

184. *Problema.* Tre città debbono far costruire un ponte valutato a ducati 1200; il pagamento di ciascuna dovrà essere in ragion inversa della distanza, cioè a dire quella che è più distante dal ponte dovrà pagar meno, e viceversa. La prima città dista dal ponte per 24 miglia, la seconda 21, e la terza 34; si cerca quanto dovrà pagare ciascuna?

Bisogna dividere 1200^d, nella ragione de' numeri 24, 21, e 34; si avranno tre quarti proporzionali, il massimo sarà il pagamento della città più vicina, il minimo quello della città più distante, ed il medio quello della rimanente; si avranno come sopra le tre proporzioni

$$79^m : 24^m :: 1200^d : x = \frac{24}{79} \times 1200 = 364^d \frac{44}{79}$$

$$79^m : 21^m :: 1200^d : y = \frac{21}{79} \times 1200 = 318^d \frac{78}{79}$$

$$79^m : 34^m :: 1200^d : z = \frac{34}{79} \times 1200 = 516^d \frac{36}{79}$$

Cioè la somma delle tre distanze sta a ciascuna distanza, come il pagamento totale starà a ciascun pagamento.

Quindi la città distante 21 miglia, cioè la più vicina al ponte dovrà pagare la somma massima di ducati 516 $\frac{36}{79}$. La città distante 34 miglia, cioè la più lontana dal ponte, dovrà pagare la somma minima di ducati 318 $\frac{78}{79}$. Infine la città distante 24 miglia dovrà pagare la somma media di 364 ducati e $\frac{45}{79}$.

Le somme da pagarsi da ciascuna città, sommate insieme formano i ducati 1200.

185. *Problema.* Un uomo nel morire lascia la sua moglie incinta; intanto dispone, che il suo asse di ducati 9000 sia distribuito nel modo seguente.

Se la madre si sgrava di una femmina ne abbia 8 parti, e 2 la figlia. Se si sgrava di un maschio ne abbia 3 parti, e 7 il figlio. Intanto succede che lo sgravo è di una femmina e di un maschio: si domanda quanto spetterà a ciascuno, rispettando la volontà del testatore.

Sia 1 il numero che esprima la parte della madre, sarà $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ la parte della figlia, e $\frac{7}{3}$ quella del figlio. Infatti la parte della madre sta a quella della figlia come $1:\frac{1}{4}::8:2$, secondo la volontà del testatore; inoltre la parte della madre sta a quella del figlio come $1:\frac{7}{3}::3:7$, secondo la volontà del medesimo: quindi è che l'asse dovrà dividersi nella ragione de' numeri 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{3}$, o che è lo stesso, nella ragion de' numeri 12, 3, 28. Perciò si sommano questi tre numeri, e si stabiliranno le seguenti proporzioni.

$$43:12::9000:x=\frac{12}{43}\times 9000=2511\frac{27}{43}$$
$$43:\ \ 3::9000:y=\frac{3}{43}\times 9000=\ \ 627\frac{39}{43}$$
$$43:28::9000:z=\frac{28}{43}\times 9000=5860\frac{20}{43}$$
$$9000\ »$$

Con tale ripartizione, alla madre spettano duc. $2511\frac{27}{43}$, alla figlia duc. $627\frac{39}{43}$, ed al figlio duc. $5860\frac{20}{43}$.

186. Cade in proposito di fare osservare, come col fatto si è praticato nel paragrafo antecedente, che dovendosi dividere un numero nella ragione di più fratti, per esempio, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, conviene ridurli allo stesso denominatore, i quali diventano $\frac{28}{56}$, $\frac{42}{56}$; $\frac{40}{56}$; tanto è dividere il numero in ragione de' dati fratti, che in ragione di questi ultimi, oppure, come sempre suole praticarsi, in ragione de' numeratori 28, 42, 40.

REGOLA D' INTERESSE COMPOSTO.

187. Nel paragrafo (173) si è parlato della regola d' interesse semplice, la quale altro non è che una regola di tre. La regola *d' interesse composto* altro non è che l' insieme di più regole di tre semplici. Una tal regola ha per oggetto di conoscere a quanto ascende un capitale alla fine di un dato tempo; per esempio. Si domanda la somma di ducati **1000**, impiegata per anni **3**, alla ragione del **5** per **100** l' anno quanto diventerà; supponendo che alla fine del primo anno l' interesse si rilascia in negozio, alla fine del secondo anno si rilascia in negozio il capitale, e l' interesse, alla fine del terzo anno si dovrà riscuotere il capitale, l' interesse del capitale dopo il primo anno, l'interesse del capitale dopo il secondo anno, e l' interesse del primo interesse per un anno ec. ec. Per cui si avrebbero le proporzioni

$$100 : 1000 :: 105 : A = \frac{1000 \times 105}{100}$$

cioè il capitale ipotetico **100**, sta al capitale effettivo **1000**, come capitale ed interesse ipotetico **105** sta a capitale ed interesse reale, onde il valore di A sarà l' interesse e capitale alla fine del primo anno. Inoltre nel secondo anno si mette in negozio la somma A, e si avrà

$$100 : A :: 105 : B = \frac{A \times 105}{100}.$$

Il B indicherà a che si riduce il capitale **1000**, alla fine di due anni.

Infine il capitale B si mette in negozio per un altro anno, e da

$$100 : B :: 105 : C = \frac{B \times 105}{100}.$$

Quindi il valore C esprimerà il capitale **1000** ducati aumentato ad interesse composto per anni **3**.

Questo metodo quantunque conducesse allo scopo, pure è alquanto laborioso, per la qual cosa ne accenneremo un'altro più compendiato, espresso in una formola semplicissima.

188. *Problema.* Si domanda una somma a impiegata ad interesse composto per anni t, quanto diventerà, supponendo l' interesse al **7** per **100** l' anno.

Per risolvere la quistione nella massima generalità, sia r l' interesse di una unità di moneta di un anno, nel nostro caso si avrà

$$100 : 7 :: 1 : r = \frac{7}{100}.$$

Se l' interesse fosse al 4 per 100 r verrebbe $\frac{4}{100}$, e così in seguito.

Ciò posto si comprende che essendo r l' interesse dell' unità dopo un anno, sarà ra l' interesse di a dopo il primo anno; perciò alla fine del primo anno il capitale a diventa $a+ra=a(1+r)=a'$. Nel secondo anno si mette in negozio a', il corrispondente interesse sarà ra', che unito al capitale a' da $a'+ra''=a'(1+r)$. E sostituendo per a' il suo valore viene

$$a(1+r)\,(1+r) = a(1+r)^2 = a'' ;$$

si pone nel terzo anno in negozio a'', il corrispondente interesse sarà ra'', alla fine del terzo anno l' ammontare è $a''+ra''=a''(1+r)$, e sostituendo per a'' il suo valore, verrà

$$a(1+r)^3, \text{ e così ec.}$$

In conseguenza alla fine del primo anno il capitale a, diventa $a(1+r)$, alla fine del secondo anno diventa $a(1+r)^2$, alla fine del terzo anno diventa $a(1+r)^3$, e così seguitando: dimaniera cchè chiamando c l' ammontare alla fine del tempo t, del capitale a, si ottiene

$$c = a(1+r)^t .$$

Questa formola contiene le quattro quantità c, a, r, t, delle quali datene tre si conoscerà la quarta.

189. *Problema.* Ducati 1200 impiegati al 6 per 100 l' anno ad interesse composto quanto diverranno dopo anni 3.

Conviene trovare il valore di r; cioè a dire, se 100 ducati danno d' interesse 6 ducati, un ducato ne darà $\frac{6}{100}$, quindi $r=0,06$.

Avremo $a=1200$, $r=0,06$, $r+1=1,06$, e $t=3$: sostituendo nella formola questi valori, si ha

$$c = 1200^{d} \times \overline{1,06}^{3} = 1200 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 =$$

D. 1429 . 21^{g} . 92, capitale richiesto.

Questo esempio si riduce a risolvere la formola, quando si conosce a, r, t.

190. *Problema.* Si domanda qual sarà il capitale a che alla fine di anni 3 dia D. 4000, alla ragione del 5 per 100 l'anno ad interesse composto.

Sarà (§. 188) $c=4000$; $r=\frac{5}{100}$, $r+1=1{,}05$, $t=3$; la incognita sarà a, perciò

$$4000=a\times\overline{1{,}05}^{3},\ \text{da cui}\ a=\frac{4000}{\overline{1{,}05}^{3}}=\frac{4000}{1{,}157625}=$$

$$\frac{4000000000}{1157625}=\text{D. }3455\ \text{circa}$$

capitale da impiegare.

Quì è il caso che nella formola si conosce c, r, t, e si trova a.

191. È da notare che se il denaro è impiegato ad interesse composto, per esempio, a semestre, r esprimerà l'interesse dell'unità in un semestre; cosicchè al 6 per 100 l'anno impiegando il danaro, r sarà eguale a $0{,}06\times\frac{1}{2}=0{,}03$, anzichè $0{,}06$, perciocchè un semestre è la metà di un anno. In tal caso il t dovrà esprimere anche semestre. Similmente se il danaro si negoziasse a trimestre, allora r sarebbe eguale a $0{,}06\times\frac{1}{4}=0{,}015$, perciocchè un trimestre è la quarta parte di un anno, e t dovrà esprimere il numero de' trimestri nei quali si negozia il danaro.

192. *Problema.* Si domanda quanto diventerà il capitale di ducati 1000 alla ragione del 6 per 100 l'anno, supponendo che l'interesse corra a bimestre; ed alla fine di 3 bimestri.

In un anno l'interesse di un ducato sarebbe $0{,}06\times\frac{1}{6}=0{,}01$, giacchè un bimestre è la sesta parte dell'anno, e quindi $r=0{,}01$; $c=1000^{\text{dti}}$, $t=3$ bimestri; la formola generale del (§. 188) da $c=1000\times\overline{1{,}01}^{3}=1000\times1{,}030301=1030^{\text{du}}.\ 30^{\text{gr}}.\ 1$.

Si fa manifesto dall' esposto che il danaro impiegato cresce a misura che l' interesse composto si maturi in più poco tempo. Per esempio. Un capitale a impiegato al 5 per 100 l' anno, dopo 6 anni da a'. L' istesso capitale a impiegato per 6 anni al 5 per 100 dia a'', supponendo però che i maturi si dovessero riscuotere ogni semestre, risulterà a'' maggiore di a'. Se i maturi fossero obbligatori ogni trimestre, ed a''' esprima l' ammontare, risulta a''' maggiore di a'', e così seguitando.

193. Se nella formola in disamina la incognita fosse l' esponente t, oppure la quantità r, si risolverebbe mediante i logaritmi.

PROGRESSIONI ARITMETICHE.

Una seguela di più quantità che aumentano, o diminuiscono con la stessa differenza si dicono formare una progressione aritmetica.

Quando i termini aumentano con detta legge, la progressione dicesi *crescente*, o *divergente*; tali sarebbero le progressioni **1. 2. 3. 4. 5. 6......** ec. **7. 10. 13. 16......** ec. Nella prima la differenza costante di aumento è **1**, nella seconda è **3**.

Quando poi diminuiscono, formano una progressione *decrescente*, o *convergente*; tali sarebbero le progressioni **91. 81. 71......** ec. **24. 22. 20......** ec. Nella prima la differenza costante di decremento è **10**, e nella seconda è **2**.

194. *Problema.* Sia la progressione aritmetica crescente $a \,.\, b \,.\, c \,.\, e \,.\, f\ldots\ldots$, e d dinoti la differenza costante. Si cerca l' ultimo termine u. Avremo con ciò $b=a+d$, $c=b+d$, $e=c+d$, $f=e+d\ldots\ldots$, e quindi sostituendo successivamente si avrà $c=a+2d$, $e=a+3d$, $f=a+4d\ldots\ldots\ldots$; dimodochè la progressione data si cambia nell' altra perfettamente eguale

$$\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, a+4d\ldots\ldots\ldots\; u\,,$$

ove la differenza apparisce essere costantemente d.

Si osserva che in ciascun termine il coefficiente di d è eguale al numero di termini antecedenti, per esempio, il quarto termine è $a+3d$, il coefficiente del d è 3, così pure il terzo termine è $a+2d$, il coefficiente di d è 2; da ciò risulta che ogni termine della progressione è eguale al primo termine più la differenza moltiplicata pel numero dei posti

antecedenti. Chiamando n il numero de' termini, r[illegible]terà: l' ultimo termine

$$u = a + (n - 1)d.$$

Cioè *l' ultimo termine di una progressione crescente è eguale al primo termine più la differenza, moltiplicata pel numero de' termini, meno uno.*

195. *Problema.* Trovare la somma s della suddetta progressione.

Essendo la progressione

$$\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, a+4d \ldots\, a+(n-2)d \,.\, a+(n-1)d.$$

quale progressione scritta in ordine inverso da

$$\div\; a+(n-1)d \,.\, a+(n-2)d \,.\, a+(n-3)d \ldots\ldots\, a+d \,.\, a.$$

È chiaro che sommando i termini in corrispondenza delle due notate progressioni si verrà ad avere due volte la somma che si cerca. La somma de' primi due termini è $a+a+(n-1)d= a+u$. La somma de' secondi due termini è $a+d+a+(n-2)d= a+a+(n-1)d=a+u$. Si scorge da ciò che la somma di due termini è sempre eguale al primo termine più l' ultimo, dimanierachè avremo

$$2s=(a+u)+(a+u)+(a+u)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(a+u):$$

e siccome i termini della data progressione sono n, così $2s$ sarà eguale ad $a+u$ preso n volte, ovvero $2s=n(a+u)$, e

$$s=\frac{(a+u)n}{2}.$$

Somma richiesta. Ossia *la somma di una progressione aritmetica crescente è eguale alla somma de' termini estremi, divisa per 2, e moltiplicata pel numero de' termini.*

196. Una progressione costa di 5 parti, cioè primo termine, ultimo termine, differenza, numero de' termini, e somma de' termini; quali parti sono comprese nelle due equazioni primitive

$$u=a+(n-1)d\ldots\ldots\, s=\frac{(a+u)n.}{2}$$

Però in ciascuna di queste equazioni vi sono quattro delle cinque parti indicate, per cui delle quantità a, u, d, n, s, datene tre si potrà conoscere immediatamente la quarta, perciocchè la quantità che non è data, nè si cerca potrà eliminarsi dalle dette due equazioni, e si perverrà ad avere una

terza equazione con quattro quantità, delle quali tre sono date, ossia si verrà a conoscere la quantità incognita; così

197. *Problema.* Date le quantità $a, d, n,$ si domanda la somma s.

Si scorge con questi dati, che le tre quantità date, e la incognita non sono tutte nella stessa formola, e che la quantità u non è data, nè si cerca, perciò dalle due formole (§. 196) eliminando u si ottiene $s=\frac{2an+dn(n-1)}{2}$, somma in parola.

198. *Problema.* Dato il primo termine a, l'ultimo termine u, ed il numero de' termini n, si cerca la differenza d.

Si osserva che questi quattro dati sono compresi nella formola $u=a+(n-1)d$, e la s che non è data, nè si cerca, non fa parte di questa formola, la quale essa sola è sufficiente di dare

$$d=\frac{u-a}{n-1}$$

differenza cercata.

199. I due quesiti antecedenti bastano a dimostrare il modo, come risolvere tutti i problemi appartenenti alle progressioni aritmetiche. Essi sono al numero di venti, e si trovano registrati nella seguente tavola.

COGNITE.	INCOGNITE.	FORMOLE.
$u\ d\ n.$	. . . .	$a=u-d(n-1)$
$n\ u\ s.$	. . . .	$a=\frac{2s-un}{n}$
$n\ d\ s.$	a	$a=\frac{2s-dn(n-1)}{2n}$
$u\ d\ s.$	. . . .	$a=\frac{d\pm\sqrt{[(2u+d)^2-8ds]}}{2}$
$a\ d\ n.$	. . . .	$u=a+d(n-1)$
$a\ n\ s.$	. . . .	$u=\frac{2s-an}{n}$
$d\ n\ s.$	u	$u=\frac{2s+dn(n-1)}{2n}$
$n\ d\ s.$	. . . .	$u=\frac{-d\pm\sqrt{[(2a-d)^2+8ds]}}{2}$
$a\ u\ d.$	. . . .	$n=1+\frac{u-a}{d}$
$a\ u\ s.$	. . . .	$n=\frac{2s}{a+u}$
$a\ d\ s.$	n	$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{[(2a-d)^2+8ds]}}{2d}$
$u\ d\ s.$	. . . .	$n=\frac{2u+d\pm\sqrt{[(2u+d)^2-8ds]}}{2d}$
$a\ u\ n.$	. . . .	$d=\frac{u-a}{n-1}$
$a\ u\ s.$	. . . .	$d=\frac{u^2-a^2}{2s-a-u}$
$a\ n\ s.$	d	$d=\frac{2s-2an}{n(n-1)}$
$u\ n\ s.$	. . . .	$d=\frac{2un-2s}{n(n-1)}$
$a\ u\ n.$	. . . .	$s=\frac{(a+u)\times n}{2}$
$a\ u\ d.$	. . . .	$s=\frac{(a+u)(u-a+d)}{2d}$
$a\ n\ d.$	s	$s=\frac{2an+dn(n-1)}{2}$
$u\ n\ d.$	. . . .	$s=\frac{2un-dn(n-1)}{2}$

200. *Problema.* Data la progressione aritmetica $\div 9 . 15 . 21 . 27 . \dots\dots\dots u$. Si domanda l'ultimo termine, e la somma, supponendo essere 12 il numero dei termini.

Avremo

$$a=9,\ n=12,\ d=6.$$

Quindi

$$u=a+d(n-1)=9+6(12-1)=9+6\times11=75$$

ultimo termine, ed

$$s=\frac{(a+u)n}{2}=\frac{(9+75)12}{2}=84\times6=504.$$

somma richiesta.

201. *Problema.* Della progressione

$$\div 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . \dots\dots\dots u$$

se ne vuol conoscere la somma s, supponendo $n=11$ termini.

Con questi dati si ha $a=5$, $d=2$, $n=11$, e l'ultimo termine u, non è dato, nè si cerca, perciò eliminato dalle due formole fondamentali (§. 196) dà

$$s=\frac{2an+dn(n-1)}{2};$$

sostituendo i numeri, viene

$$s=\frac{2\times5\times11+2\times11(11-1)}{2}=165.$$

202. *Problema.* Fra le due quantità a, ed u, inserire un numero m di medî proporzionali aritmetici.

Essendo n il numero de' termini, ed m il numero de' medi che si debbono inserire, tutti i termini saranno $m+2$, perciò si ha $n=m+2$. La incognita in questo quesito è la differenza d in funzione di a, u, ed n; la prima delle formole (§. 196) $u=a+(n-1)d$, dà

$d=\frac{u-a}{n-1}=\frac{u-a}{m+1}$. Quindi il primo medio sarà $a+\frac{u-a}{m+1}=$ $\frac{u-a+am+a}{m+1}=\frac{u+am}{m+1}$, il secondo medio verrà $a+\frac{2(u-a)}{m+1}=$ $\frac{2u-2a+am+a}{m+1}=\frac{2u-a+am}{m+1}=\frac{2u+(m-1)a}{m+1}$, così ec.

Esempio. Inserire fra 5 e 20, 4 medî proporzionali. Si ha $a=5$, $u=20$, $m=4$, sarà

$$m+1=5, \text{ e } d=\frac{u-a}{m+1}=\frac{20-5}{4+1}=\frac{15}{5}=3;$$

onde la progressione sarà

$$\div 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20,$$

cioè i quattro medî proporzionali fra 5, e 20, sono

$$8, 11, 14, 17.$$

PROGRESSIONI GEOMETRICHE.

Una sequela di più quantità che aumentano, o diminuiscono in un rapporto geometrico costante, ossia con lo stesso quoziente, si dicono formare una progressione geometrica.

Quando i termini aumentano con la stessa legge, la progressione dicesi *crescente*, o *divergente*; tali sarebbero le progressioni $1 . 4 . 16 . 32 \ldots\ldots$ ec. $3 . 6 . 12 . 24 \ldots\ldots$ ec. Nella prima il quoziente costante è 4, nella seconda è 2. Quando poi diminuiscono, formano una progressione *decrescente*, o *convergente*; tali sarebbero le progressioni

$$120 . 60 . 30 . 15 . 7\frac{1}{2} \ldots\ldots \text{ ec. } 81 . 27 . 9 . 3 . 1 \ldots \text{ ec.}$$

Nella prima il quoziente costante è 2, e nella seconda è 3.

203. *Problema*. Sia la progressione geometrica crescente $a . b . c . d . e . f \ldots\ldots$, e q dinoti il quoziente costante. Si cerca l'ultimo termine u. Avremo con ciò $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq \ldots$, e quindi sostituendo successivamente si avrà $b=aq$, $c=q\times aq=aq^2$, $d=q\times aq^2=aq^3$, $e=q\times aq^3=aq^4 \ldots$ ec. e la progressione data si cambia nell'altra

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots\ldots\ldots\ldots u,$$

nella quale il quoziente è sempre q, ossia dividendo un termine pel termine antecedente si ha q.

Si osservi che in ciascun termine l'esponente di q è eguale al numero de' termini antecedenti, per esempio, l'esponente di q nel 5° termine è 4; da ciò risulta che ogni termine della progressione è eguale al primo termine, moltiplicato pel quoziente, elevato al numero de' termini antecedenti. Esprimendo con n il numero de' termini, risulterà l'ultimo termine

$$u=aq^{n-1},$$

Cioè *l'ultimo termine di una progressione geometrica crescente, è eguale al primo termine moltiplicato pel quoziente elevato al numero de' termini meno uno.*

204. *Problema.* Trovare la somma s della suddetta progressione. Quindi

$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots \ldots \ldots aq^{n-2} + aq.^{n-1}$, ed

$s - a = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots \ldots aq^{n-2} + aq.^{n-1} =$

$q(a + aq + aq^2 \ldots \ldots \ldots \ldots aq^{n-3} + aq^{n-2})$; la quantità in parentesi altro non esprime, se non che la somma della data progressione, meno l'ultimo termine, per la qual cosa si ha

$$s - a = q(s - u) = qs - qu, \text{ da cui}$$

$s = \dfrac{uq - a}{q - 1}$ somma cercata. Ossia *la somma di una progressione geometrica crescente, è eguale al prodotto dell'ultimo termine pel quoziente, meno il primo termine, tutto diviso pel quoziente meno l'unità.*

205. Le cinque parti componenti una progressione geometrica sono comprese nelle due formole principali, le quali sono il risultamento de' due problemi antecedenti.

$$u = aq^{n-1}, \quad s = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

In quanto alla soluzione di queste formole è da osservarsi quello che sopra si è dichiarato (§. 196).

206. *Problema.* Date le quantità a, q, n, si cerca s.

Le tre date quantità, e la incognita non sono nella stessa formola, e la quantità u non è data, nè si cerca, in conseguenza dalle due formole (§. 205) eliminando u si ottiene

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ somma richiesta.}$$

207. *Problema.* Dato il primo termine a, l'ultimo termine u, ed il numero de' termini n, si cerca il quoziente q.

Si osserva che questi quattro dati sono compresi nella prima delle due formole suddette, e la s che non è data, nè si cerca, non fa parte di questa formola, la quale risoluta rispetto a q, dà $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{u}{a}}$, quoziente in parola.

208. I diversi quesiti delle progressioni in disamina sono registrati nella tavola seguente.

COGNITE.	INCOGNITE.	FORMOLE.
q, n, u	. . . .	$a = \frac{u}{q^{n-1}}$
	a	
q, n, s	. . . .	$a = s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$
q, u, s	. . . .	$a = q(u-s)+s$
n, u, s	. . . .	$(s-a)a^{\frac{1}{n-1}} = (s-u)u^{\frac{1}{n-1}}$
a, n, u	. . . .	$q = \sqrt[n-1]{\left[\frac{u}{a}\right]}$
	q	
a, u, s	. . . .	$q = \frac{s-a}{s-u}$
a, n, s	. . . .	$q = \sqrt[n]{\left[\frac{a+sq-s}{a}\right]}$
u, n, s	. . . .	$q^n - \frac{sq^{n-1}}{s-u} + \frac{u}{s-u} = 0$
a, q, n	. . . .	$u = aq^{n-1}$
a, q, s	. . . .	$u = \frac{sq-s+a}{q}$
	u	
q, n, s	. . . .	$u = \frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$
a, n, s	. . . .	$u(s-u)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$
a, u, q	. . . .	$n = 1 + \frac{\log. u - \log. a}{\log. q}$
a, u, s	. . . .	$n = 1 + \frac{\log. u - \log. a}{\log.(s-a) - \log.(s-u)}$
	n	
a, q, s	. . . .	$n = \frac{\log.(a+sq-s) - \log. a}{\log. q}$
u, q, s	. . . .	$n = 1 + \frac{\log. u - \log.(s-qs+uq)}{\log. q}$
a, u, q	. . . .	$s = \frac{uq-a}{q-1}$
a, u, n	. . . .	$s = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$
	s	
a, n, q	. . . .	$s = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$
u, n, q	. . . .	$s = \frac{u(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}$

209. *Problema*. Data la progressione geometrica crescente $\div 7 : 14 : 28 : 56 \ldots\ldots u$, si domanda l'ultimo termine, e la somma, supponendo **11**, il numero de' termini.

Avremo $a = 7$, $n = 11$ $q = 2$.

Quindi $u = aq^{n-1} = 7 \times 2^{10} = 7 \times 1024 = 7168$. ultimo termine, ed

$$s = \frac{uq - a}{q - 1} = \frac{14336 - 7}{2 - 1} = \frac{14329}{1} = 14329.$$

somma in disamina.

210. *Problema*. Della progressione $\div 3 : 9 : 27 : 81 \ldots\ldots u$ se ne vuò conoscere la somma s, supponendo $n=7$ termini. Si ha $a=3$, $q=3$, $n=7$; l'ultimo termine u non è dato, nè si cerca, si elimini dalle due formole cognite (§. 205) dà

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{3(2187 - 1)}{3 - 1} = \frac{3 \times 2186}{2} = 3279.$$

richiesta somma.

211. *Problema*. Fra le due quantità a, ed u, inserire un numero m di medî proporzionali geometrici.

Si scorge da qui che la incognita è q, quoziente di due termini vicini; in conseguenza i dati sono a, u, n, e si cerca q. Queste quattro quantità fanno parte della prima formola

$u = aq^{n-1}$, e $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; ma perchè $n = m + 2$, sarà $n - 1 = m + 1$, e perciò $q = \sqrt[m+1]{\frac{u}{a}}$. La progressione verrà

$$\div a : a\sqrt[m+1]{\frac{u}{a}} : a\sqrt[m+1]{\frac{u^2}{a^2}} : a\sqrt[m+1]{\frac{u^3}{a^3}} : \text{ec.} \quad . \quad . \quad . \quad u.$$

Siano quattro i medî proporzionali che si vogliano inserire tra a ed u; verrà $m=4$; dunque

$$q = \sqrt[5]{\frac{u}{a}},\ q^2 = \sqrt[5]{\frac{u^2}{a^2}},\ q^3 = \sqrt[5]{\frac{u^3}{a^3}},\ q^4 = \sqrt[5]{\frac{u^4}{a^4}};$$

ossia la progressione verrà

$$\div a : a\sqrt[5]{\frac{u}{a}} : a\sqrt[5]{\frac{u^2}{a^2}} : a\sqrt[5]{\frac{u^3}{a^3}} : a\sqrt[5]{\frac{u^4}{a^4}} : u\,,$$

oppure

$$\div a : \sqrt[5]{a^4u} : \sqrt[5]{a^3u^2} : \sqrt[5]{a^2u^3} : \sqrt[5]{au^4} : u.$$

Siano i numeri 1, e 32, fra i quali si vogliano inserire quattro medî proporzionali, verrà $a=1$, $u=32$, $m=4$, e quindi

$$\div 1 : \sqrt[5]{1^4.32} : \sqrt[5]{1^3.32^2} : \sqrt[5]{1^2.32^3} : \sqrt[5]{1.32^4} : 32,$$

e riducendo

$$\div 1 : \sqrt[5]{32} : \sqrt[5]{32^2} : \sqrt[5]{32^3} : \sqrt[5]{32^4} : 32, \text{ ossia}$$

$$\div 1 : \sqrt[5]{(2)^5} : \sqrt[5]{(2)^5.(2)^5} : \sqrt[5]{(2)^5.(2)^{10}} : \sqrt[5]{(2)^{20}} : 32; \text{ infine}$$

$$\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32.$$

Questo esempio si è potuto facilmente eseguire perciocchè i numeri sono stati facili a potersi valutare, e le radici si sono facilmente ottenute. Se poi i numeri dati non presentassero la medesima facilità nelle operazioni, allora converrebbe ricorrere ai logaritmi, i quali insegnano il modo come estrarre qualunque radice.

212. È lieve l'osservare che ogni progressione decrescente, scritta in ordine inverso diviene crescente; per la qual cosa le formole stabilite si possono adattare tanto alle progressioni crescenti, che alle decrescenti. Se poi una progressione decrescente non si volesse scrivere un' altra volta onde renderla crescente, converrà nelle formole (§. 205) supporre u il primo termine, ed a l'ultimo termine.

213. *Problema.* Trovare la somma della progressione decrescente all'infinito.

$$\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \ldots\ldots\ldots\ 0.$$

Essendo $s = \dfrac{uq-a}{q-1}$, per quello che si è detto sarà $u = \dfrac{1}{2}$, $a=0$, $q=2$ ed $s = \dfrac{\frac{1}{2}\times 2-0}{2-1} = 1$, somma cercata.

Quest' esempio vale a conoscere come le formole delle progressioni crescenti si adattano facilmente alle decrescenti. Lo stesso è da dirsi in quanto alle progressioni aritmetiche decrescenti.

LOGARITMI.

214. Nel risolvere una equazione abbiamo trovato il valore della incognita col mezzo dei noti metodi e ripieghi algebrici. Ma se la incognita x si trova per esponente come in $b=a^x$; i detti metodi non conducono alla risoluzione della equazione. Per conseguir dunque l'intento convien premettere alcune idee generali.

Nella detta equazione a misura che varia x varierà altresì il b, supponendo a costante. Generalmente si può assumere l'equazione $y=a^x$, nella quale l'esponente x dicesi *logaritmo* di y: cioè *per logaritmo di un numero s' intende quell' esponente a cui bisogna elevare una quantità costante affinchè il detto numero sia riprodotto.* È però la quantità costante dicesi *base* de' logaritmi.

Così $9=3^2$, $27=3^3$, $81=3^4$ ec. 2, 3, e 4 saranno i logaritmi di 9, 27, e 81, nel caso per altro che la base sia eguale a 3: così pure $10=10^1$, $100=10^2$, $1000=10^3$, ec. 1. 2. 3 saranno i logaritmi di 10. 100. 1000 ec. nel sistema in cui la base è dieci. Da ciò si comprende che un numero può avere tanti logaritmi per quanti numeri si possono adottare per base.

Nella equazione $y=a^x$ il logaritmo di y è x, e si scrive $\log y=x$: cioè x è quello esponente a cui bisogna elevare la base a per prodursi y. Facendo $x=0$ risulta $y=a^0=1$, così $y'=b^x$ fatto $x=0$ sarà $y'=b^0=1$: dall'essere $\log 1=0$ qualunque sia la base, ne risulta che *in tutti i sistemi il logaritmo di uno è zero:* poichè se $a=a'$, ne viene che $\log a=1$. onde il *logaritmo della base è sempre eguale all' unità.*

215. Dalla equazione generale $y=a^x$ si ha $\log y=x$, $y'=a^{x'}$, e $\log y'=x'$: e $y\times y'=a^x\times a^{x'}=a^{x+x'}$; ma per la definizione $\log yy'=x+x'=\log y+\log y'$:ossia *il logaritmo del prodotto è eguale alla somma de' logaritmi d'ambi i fattori.*

Se si volesse il logaritmo di $yy'y''$ sarebbe $\log yy'y''=\log y+\log. y'+\log y''$: così proseguendo.

Si ha pure dividendo le due equazioni , $\frac{y}{y'}=\frac{a^x}{a^{x'}}=a^{x-x'}$,
dunque $\log\frac{y}{y'}=x-x'=\log y-\log.y'$: cioè *il logaritmo del quoziente pareggia il logaritmo del dividendo meno quello del divisore.*

Sia $z=b^m$ in cui m sia intero e positivo sarà $z=b\times b\times b\times b\ldots$, e $\log z=\log b+\log b+\log b+\log b\ldots=m\log b$. quindi $\log. b^m=m\log b$. Onde *il logaritmo di una quantità elevata a potenza pareggia l' indice della potenza moltiplicato pel logaritmo di essa quantità.*

Sia $z=\sqrt[m]{b}=$, $b^{\frac{1}{m}}$ sarà $z^m=b$, e perciò $\log.z^m=\log.b$, da cui $m\log z=\log.b$, $\log.z=\frac{\log b}{m}$, e $\log.\sqrt[m]{b}=\frac{\log.b}{m}$,
vale quanto dire che *il logaritmo di una radice è eguale al logaritmo della quantità sotto il radicale, diviso per l' indice di detto radicale.*

Esempi

$$d=\frac{x^2a^3b^x}{c^{x^2}}\text{; sarà }\log d=\log.x^2+\log.a^3+\log.b^x-$$

$$\log c^{x^2}=2\log x+3\log a+x\log b-x^2\log.c.$$

$$m=\frac{a^xb}{c^{2x}},\ \log.m=\log.a^xb-\log.c^{2x}=$$

$$\log.a^x+\log b-2x\log c=x\log a+\log b-2x\log.c=$$

$$x(\log a-2\log c)+\log.b\text{ , e}$$

$$x(\log a-2\log c)=\log m-\log b\text{ , ed}$$

$$x=\frac{\log m-\log b}{\log a-2\log.c}.$$

$$p=\sqrt[m]{b^x},\ \log.p=\frac{\log.b^x}{\log m}=\frac{x\log.b}{\log.m}\text{, ed}$$

$$x=\frac{\log.p.\log.m}{\log.b}.$$

In questi due ultimi esempî si sono ricavati i valori della x col ripiego de' logaritmi. Con tutt' altro metodo algebrico non si sarebbe ottenuto l' intento.

Esprimano a, A le basi di due sistemi. Siano due numeri m, M, i cui logaritmi, nel sistema a, siano p, P: e nel sistema A, q, e Q: sarà
$m = a^p, M = a^P$; $m = A^q, M = A^Q$: perciò $a^p = A^q$, e $a^P = A^Q$: elevando la prima equazione alla potenza P, e la seconda alla potenza p, si ha $a^{pP} = A^{qP}$, $a^{Pp} = A^{Qp}$. Da quì risulta $A^{qP} = A^{Qp}$, e $qP = Qp$: mettendo in proporzione $P : p :: Q : q$. In conseguenza *i logaritmi de' numeri in un sistema sono proporzionali ai logaritmi degli stessi numeri in un altro sistema.*

Da questo teorema conseguita, che calcolati i logaritmi di tutti i numeri in un sistema, si potranno calcolare i logaritmi di essi numeri in un altro sistema. Infatti esprimendo, per distinguerlo, con l i logaritmi della base a, e con L quelli della base A: l' ultima proporzione dà

$$\log M : \log. m :: L.\ M : l.\ m.$$

E supponiamo che il sistema calcolato, sia quello della base a: si vuol calcolare quello della base A. In questa proporzione sia $M = A$, ne verrà
$\log. A : \log m :: L.\ A : L.\ m$: ma $L.\ A$ è il logaritmo della base nel proprio sistema, cioè l'unità (§. 214), dunque

$$\log. A : \log. m :: 1 : L.\ m = \log.\ m \times \frac{1}{\log.\ A}$$

Onde *il logaritmo di un numero in un sistema da calcolarsi, è eguale al logaritmo dello stesso numero nel sistema calcolato, moltiplicato per un fratto che ha per numeratore l' unità, e per denominatore il logaritmo della base del sistema da calcolarsi preso nel sistema calcolato.* Questa frazione dicesi *modulo* del sistema da calcolarsi: percui *il logaritmo di un numero pareggia il logaritmo dello stesso numero nel sistema cognito, moltiplicato pel modulo del sistema incognito.*

Nepero Barone Scozzese fu l' inventore de' logaritmi. Egli prese per base (2,71828) somministrata dalla quadratura della iperbole; e perciò i logaritmi di tale base diconsi logaritmi *Neperiani* o *iperbolici*: ma Brigio ha sostituito un altro sistema la cui base è 10: percui i logaritmi corrispondenti furono detti logaritmi *Brigiani*, o *volgari.*

CALCOLO DE' LOGARITMI VOLGARI.

216. Essendo la base 10, sarà

$10 = 10^1$, e $1 = \log. 10$
$100 = 10^2$, $2 = \log. 100$
$1000 = 10^3$, $3 = \log\ 1000$. così in seguito.

in conseguenza scrivendo le due progressioni, una aritmetica e l' altra geometrica, in modo che i numeri si corrispondano,

si avrà 0. 1. 2. 3. 4. 5
1. 10. 100. 1000. 10000. 100000.

I numeri superiori saranno, come si è osservato, i logaritmi de' numeri inferiori: vale a dire che i termini della progressione aritmetica formano i logaritmi de' numeri della progressione geometrica. Ora si voglia il logaritmo di 5, numero compreso fra 1 e 10: si cerca un medio proporzionale geometrico fra 1 e 10, che sarà $x = \sqrt{10} = 3{,}162277$. Il logaritmo di questo numero sarà un medio aritmetico fra 0 e 1, cioè 0,5: perciò il logaritmo di $x = 0{,}5$: questo logaritmo si ha pure da $x = \sqrt{10}$, perciocchè $\log. x = \frac{\log. 10}{2} = 0{,}5$: Inoltre fra 3,162277 e 10 si cerca un medio geometrico il quale sarà $\sqrt{10 \times 3{,}162277} = 5{,}6234113$; dunque $\log. \sqrt{10 \times 3{,}162277} = \frac{\log. 10 + \log. 3{,}162277}{2} = 0{,}7500000$.

Così si continua, fino a che si giunga ad un numero che differisca da 5 solamente per la quinta, sesta ec. cifra decimale, se i logaritmi si vogliano approssimare fino alle parti centomillesime, milionesime ec. Con ciò si è trovato che $\log. 5 = 0{,}6989700$: e si troverà $\log. 2 = \log. 10 - \log. 5 = 0{,}3010300$.

I logaritmi di 2 e 5 daranno i logaritmi delle potenze di 2, e 5: così $\log. 2^n = n \log. 2$, e $\log. 5^n = n \log. 5$. Come pure si possono calcolare i logaritmi de' numeri eguali ad una potenza di 2 moltiplicata per una potenza di 5 così

$\log. 4 = 2 \log. 2 = 0{,}6020600$
$\log. 25 = 2 \log 5 = 1{,}3979400$,
$\log. 40 = \log. 5 + \log. 8 = 1{,}6020600$. L' unità si dice la *caratteristica* del logaritmo, e 6020600 la *parte decimale*, e così degli altri.

Alla stessa maniera si sono calcolati i logaritmi de' numeri primi compresi fra **1** e **10**, fra **10** e **100** ec. e trovati con tal calcolo i logaritmi di tutti i numeri, i quali sono registrati nelle così dette tavole logaritmiche.

TAVOLE LOGARITMICHE.

217. Si è osservato che il logaritmo di **1** è zero, quello di **10** è **1**: quindi i logaritmi di **2. 3. 4. 5. 6. 7. 8** e **9** hanno per caratteristica zero. Inoltre il logaritmo di **10** è **1**, quello di **100** è **2**: dunque i logaritmi de' numeri compresi fra **10** e **100** hanno **1** per caratteristica: quelli de' numeri fra **100** e **1000** hanno 2 per caratteristica, e così in seguito; *cioè il logaritmo di un numero intero costa di due parti, di un intero e di un decimale: l'intero conterrà tante unità quante sono le cifre del numero meno una:* così la caratteristica di **17543** sarà **4**, quella di **17343145** sarà **7**, e cosi seguitando.

218. Varie sono le tavole logaritmiche calcolate: ma quelle di Callet meritano la preferenza, perciocchè contengono i logaritmi volgari, i neperiani, i logaritmi delle linee trigonometriche secondo la divisione sessagesimale, e secondo la divisione centesimale del quadrante. Dopo queste si possono annoverare le tavole di Borda, di Cardiner, di Planzoles. Ma analizzeremo partitamente quelle di Lalande, come le più compendiate, e perciò meglio accomodate pei nostri calcoli non astronomici.

Le tavole di Lalande contengono i logaritmi de' numeri interi da **1** fino a **10000**: ci sono tre specie di colonne, nella prima sono registrati i numeri, nella seconda i corrispondenti logaritmi e nella terza la differenza de' logaritmi.

In testa a ciascuna colonna de' logaritmi vi sono i minuti primi e secondi, eguali a tanti minuti secondi per quanto l' indica ciascun numero posto per primo nella colonna de' numeri. Così al numero **3420** corrisponde il logaritmo **3,53403**: al n.° **3421** corrisponde il logaritmo **3,53415**, nella seconda colonna: nella terza si trova il numero **12** ch'è la differenza de' detti logaritmi. Il n.° **0.57'.0''** ridotti a minuti secondi dà il numero **3420** scritto come si vede il primo della prima colonna, il numero **3421** immediato corrisponde a **0.57'.1''**; **3422** a **0,57'.2''** così via discorrendo.

Nelle tavole in disamina si legge

$$\log. 3414 = 3{,}53326 : \text{ quindi}$$

$$\log. \frac{3414}{10} = \log. 341{,}4 = 3{,}53326 - 1 = 2{,}53326 ;$$

$$\log. \frac{3414}{100} = \log. 34{,}14 = 3{,}53326 - 2 = 1{,}53326$$

$$\log. \frac{3414}{1000} = \log. 3{,}414 = 3{,}53326 - 3 = 0{,}53326.$$

Inoltre

$$\log. 3414 \times 10 = 3{,}53326 + 1 = 4{,}53326$$
$$\log. 3414 \times 100 = 3{,}53326 + 2 = 5{,}53326$$
$$\log. 3414 \times 1000 = 3{,}53326 + 3 = 6{,}53326. \text{ ec.}$$

Da ciò si ritrae *che se si divide o si moltiplica un numero per una potenza di 10, la frazione decimale nel logaritmo del quoziente, o del prodotto rimane la stessa.*

Come pure *la parte decimale di un logaritmo, appartenente ad un numero che contiene parti decimali ed interi, è la stessa di quella che si avrebbe di tutto il numero considerato come intero, cioè come se la virgola che divide le cifre decimali non vi fosse.*

COMPLEMENTO ARITMETICO.

219. Il *complemento aritmetico* serve a ridurre la sottrazione a somma; così da 36 togliendo 15 rimane 21, questo numero si può avere nel seguente modo: si toglie 15 da 100 e rimane 85, poscia 85 unito a 36 dà 121, si staccano, venendo da destra a sinistra, due cifre, e si ha 21 che sarà il residuo: così da 17454 si voglia togliere 2745: questo si toglie da 100000 e rimane 97255: indi si somma 17454 con 97255 e si ha 114709 che sarà il residuo col complemento aritmetico 100000, cioè in questo numero vi saranno 100000 unità di più, perciò togliendole si verrà ad avere il giusto residuo, cioè staccando cinque decimali viene 14709, che sarà il richiesto residuo.

Inoltre se da 35 si debba togliere 75, il residuo sarà negativo cioè -40: per evitare questo numero negativo, a 35

si aggiunge **100**, e si ha **135** toltone **75** rimane **60**: cioè questo numero indica la richiesta differenza col complemento aritmetico **100**.

Così da **174** toltone **7452** rimane **—7278**: per evitare questo residuo negativo, si aggiunge **10000** a **174** e si ha **10174**; da questo si toglie **7452** e dà **2722**, residuo ch'è più del vero per **10000**, cioè a dire **2722** è il richiesto residuo col complemento aritmetico **10000**; se poi si voglia tal residuo negativo da **2722** si toglie **10000** e dà **— 7278**.

220. Ciò premesso

$$\log.\ \frac{1}{2}=\log.1-\log.2=0-0{,}30103=-0{,}30103$$

$$\log.\ \frac{2}{3}=\log.2-\log.3=0{,}30103-0{,}47712=-0{,}17609$$

per evitare i logaritmi negativi, i quali conducono spesso equivoci, si aumenta di **10** la caratteristica del numeratore, ed in tal modo, gli si può sottrarre il logaritmo del denominatore: infatti

$$\log.\ \frac{1}{2}=9{,}69897,\ \log.\ \frac{2}{3}=9{,}82390.$$

Qui veramente si è commesso un grande errore, tanto sul logaritmo perchè la caratteristica è aumentata di **10**, quanto sul numero corrispondente perciocchè è moltiplicato per **10000000000**: ma questo doppio errore si corregge infine, togliendo una decina al logaritmo ultimo.

Così:

$$\log.\ 13\times\frac{7}{8}=\log.\ 13+\log.\frac{7}{8};\ \text{ma}$$

$$\log.\ \frac{7}{8}=\log.7-\log.8=\ \text{com. log. }7-\log.\ 8=$$

$$10{,}84501-0{,}90309=9{,}94201:\ \text{cioè}$$

$$\log.\ \frac{7}{8}=9{,}94201:\ \text{dunque}$$

$$\log.\ 13\times\frac{7}{8}=\log.\ 13+9{,}90201=1{,}11394+$$

$$9{,}94201=11{,}05595,$$

quì vi è il complemento aritmetico 10, dunque togliendolo, il logaritmo della data espressione verrà 1,05595.

Si poteva anche ottenere questo logaritmo nel modo seguente, ad oggetto di togliere la sottrazione,

$$\log.\ 13 \times \frac{7}{8} = \log.\ 13 + \log.\ 7 + \text{com. log. } 8,$$

log. 13	1,11394
log. 7	0,84510
com. log. 8(= 10—0,90309) =	9,09691
	11,05595 tolto 10 rimane
	1,05595. come sopra.

Se poi sono presi due complementi, dalla caratteristica finale si toglierà 20: se 3, conviene togliere 30 dalla caratteristica.

221. Logaritmo di $\frac{7}{10}$=log.7 + com. log.10=0,84510+ 9=9,84510

$$\log.\ \frac{7}{100} = \log.7 + \text{com.log.}100 = 0,84510 + 8 = 8,84510.$$

$$\log.\ \frac{7}{1000} = 0,84510 + 7 = 7,84510 \text{ ec.}$$

Quindi *i logaritmi delle parti decime hanno per caratteristica 9, quelli delle parti centesime hanno per caratteristica 8, quelli delle parti millesime hanno 7 per caratteristica, e così seguitando.*

Per rendere familiare l'uso delle tavole logaritmiche esporremo i seguenti problemi.

222. *Problema.* Dato il numero 174,3, trovarne il logaritmo. Sarà log. 1743=3,24130, e perciò log. 174,3=2,24130.

223. *Problema.* Trovare il logaritmo di 1274,3: Si trovano i logaritmi di 1274, e 1275 cioè del numero prossimamente maggiore e minore del dato, i quali sono

log. 1274 =	3,10517	la differenza n' è
log. 1275 =	3,10551	
	0,00034	

la quale si trova nelle tavole.

Indi si stabilisce la seguente proporzione

$$1 : 0,3 :: 0,00034 : x$$

cioè differenza del numero prossimamente maggiore e prossimamente minore del dato, alla differenza del dato sul prossimamente minore, come la differenza logaritmica del prossimamente maggiore e prossimamente minore del dato al quarto proporzionale, il quale sarà la differenza logaritmica del dato numero sul prossimamente minore.

Questa proporzione ha luogo perchè *i numeri di quattro cifre in poi hanno la differenza numerica proporzionale alla differenza logaritmica*, come dalle tavole apparisce.

La riportata proporzione ci dà

$x = 0{,}00034 \times 0{,}3 = 0{,}000102$, o circa $0{,}00010$: questo quarto proporzionale aggiunto a $3{,}10517$, logaritmo di 1274 dà $3{,}10527$ che sarà il logaritmo di $1274{,}3$.

224. *Problema.* Trovare il logaritmo di 17455.

Si trova il logaritmo di $1745{,}5$. Facendo la proporzione del problema antecedente, cioè

$1 : 0{,}5 :: 25 : x = 1{,}25$, cioè 1 diecimillesimo: ma il logaritmo di 1745 è $3{,}24180$, dunque $3{,}24181$ sarà il logaritmo di $1745{,}5$: quindi il logaritmo di 17455 sarà $4{,}24181$.

225. *Problema.* Trovare il logaritmo di $2{,}71$.

Si trova il logaritmo di 271, il quale è $2{,}43297$: ma la caratteristica del dato numero dev'esser zero, (§. 217) dunque

$\log.\ 2{,}71 = 0{,}43297$.

Si è quì ridotto il numero a contenere tre cifre per le ragioni indicate di sopra.

226. *Problema.* Trovare il logaritmo di $\frac{7}{12}$

Sarà $\log.\ \frac{7}{12} = \log.\ 7 + \text{com.}\ \log.\ 12 = 0{,}84510 +$

$8{,}92082 = 9{,}76592$.

227. *Problema.* Trovare il logaritmo di $0{,}0171$:

Quì la caratteristica dev'esser 8 (§. 221): ma $\log.\ 171 = 2{,}23300$: dunque $\log.\ 0{,}0171 = 8{,}23300$.

228. *Problema.* Trovare il valore di x nella equazione $7127 = 13^x$

Sarà $x \log.\ 13 = \log.\ 7127$ ed

$$x = \frac{\log.\ 7127}{\log.\ 13} = \frac{3{,}85291}{1{,}11394} = \frac{385291}{111394} = 3{,}45 : \text{quindi}$$

$$7127 = 13^{3,45}$$

229. *Problema*. Trovare il numero il cui logaritmo sia 2,34513.

Si osservi che questo logaritmo non si trova registrato nelle tavole, e perciò dovrà appartenere ad un intero composto di tre cifre più una parte decimale. Intanto si consideri tale logaritmo con la caratteristica 3, cioè si operi sul logaritmo 3,34513 per la ragione espressa di sopra (§. 223). Nelle tavole si trovano registrati i logaritmi 3,34498; e 3,34518 cioè il prossimamente minore ed il prossimamente maggiore del dato: i quali logaritmi appartengono ai numeri 2213, e 2214.

Ciò posto si stabilisce la seguente proporzione (§. 223).

$$0,00020 : 0,00015 :: 1 : x$$

Cioè differenza logaritmica del prossimamente maggiore e minore del dato, alla differenza del dato sul prossimamente minore, come l'unità, differenza del n.° prossimamente maggiore e prossimamente minore, al quarto proporzionale, che sarà la differenza fra il numero prossimamente minore ed il dato; ma il numero minore si conosce; dunque coll'aggiunta della parte decimale darà il numero appartenente al dato logaritmo: La proporzione dà

$20 : 15 :: 1 : x = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0,75$, dunque 2213,75 sarà il numero appartenente al logaritmo 3,34513, onde il numero 221,375 avrà per logaritmo il dato 2,34513.

230. *Problema*. Trovare il numero corrispondente al logaritmo 5,34513.

Si scorge che questo logaritmo appartiene ad un numero di 6 cifre (§. 217): intanto si operi sul logaritmo 3,34513: il numero corrispondente è (§. 229) 2213,75: perciò 221375 avrà per logaritmo il dato 5,34513.

231. *Problema*. Estrarre la radice cubica di 17455.

Essendo questa $\sqrt[3]{17455}$; sarà

$$\log.\sqrt[3]{17455} = \frac{\log.17455}{3} (\S.\ 224) = \frac{4,24181}{3} = 1,41393:$$

ma il numero corrispondente a questo logaritmo è 25,9312 (§.229) dunque

$$\sqrt[3]{17455} = 25,9312.$$

232. *Problema.* Trovare la radice quadrata di $\frac{7}{8}$; sarà

$$\log\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{1}{2}\log.\frac{7}{8}=\frac{1}{2}(\log.7+\text{com.}\log.8)=$$

$\frac{1}{2}(0,84510+9,09691)$: Quì si osservi che dovendosi prendere la metà di **0,84510**, e la metà del complemento **9,09691**, perciò si avrebbe mezzo complemento : ma per farsi che resti sempre un sol complemento, conviene prendere un doppio complemento, o per meglio dire aggiungere a **9,09691** dieci che diventa **19,09691**; quindi

$\log\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{1}{2}(0,84510+19,09691)=\frac{1}{2}\times 19,94201$: essendo in **19,94201** due complementi, presane la metà, rimarrà un sol complemento, dunque $\frac{1}{2}\times 19,94201=9,97100$ sarà il logaritmo di $\sqrt{\frac{7}{8}}$ con un complemento. Ma siccome la caratteristica di questo logaritmo è **9**, così il numero corrispondente conterrà le parti decime senza interi. Si trovi il numero appartenente a **3,97100**, ch'è **9354**: quindi si ha

$$9,97100=\log.0,9354,$$

dunque

$$\log.\sqrt{\frac{7}{8}}=\log.0,9354, \text{ e perciò}$$

$$\sqrt{\frac{7}{8}}=0,9354.$$

233. *Problema.* Estrarre la radice cubica di $\frac{7}{8}$. Avremo

$$\log.\sqrt[3]{\frac{7}{8}}=\frac{1}{3}(\log 7+\text{com}\log.8)=\frac{1}{3}(0,84510+9,09691).$$

Per la stessa ragione detta di sopra, conviene fare uso di tre complementi, o per dir meglio fare

$$\log.\sqrt[3]{\frac{7}{8}}=\frac{1}{3}(0,84510+29,09691)=\frac{1}{3}\times 29,94201=$$
$$9,98067.$$

Si trovi il numero corrispondente a 3,98067 ch'è 9565,75: ma il numero deve cominciare dalle parti decime, dunque

$$\sqrt[3]{\frac{7}{8}}=0,956575.$$

Vale a dire che nell'estrarre la radice di un fratto, mediante i logaritmi, conviene far uso di tanti complementi quanto ne indicano le unità contenute nell'indice radicale.

234. *Problema.* Estrarre la radice cubica di 0,3471;

sarà $\log.\sqrt[3]{0,3471}=\frac{1}{3}\log 0,3471$; ma il logaritmo di 0,3471 è 9,54045 con un complemento, perciò bisogna introdurne altri due (§.233): dunque sarà $\log.\sqrt[3]{0,3471}=\frac{1}{3}\times 29,54045=$ 9,83681, ma il numero del logaritmo 3,83681 è 6867,66: perciò $\sqrt[3]{0,3471}=0,686766$.

235. *Problema.* Trovare il modulo del sistema Neperiano.

Essendo il modulo di un sistema da calcolarsi eguale ad un fratto che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore il logaritmo della base del sistema incognito, preso nel sistema cognito (§. 215): ed essendo la base del sistema Neperiano eguale 2,71828: il suo logaritmo è 0,43429: quindi

il modulo sarà $\dfrac{1}{0,43429}=2,30258$.

Quindi (§. 215).

Logaritmo Neperiano di M = logaritmo Brigiano di M moltiplicato per 2,30258: esprimiamo con L i logaritmi Neperiani, e con l i Brigiani; sarà

$L.M=2,30258.\ l M$: da qui

$l.\ M=\dfrac{1}{2,30258}\times LM=0,43429\times LM$: quindi 0,43429

è il modulo del sistema Brigiano: da quì si scorge che 2,30258 è il logaritmo Neperiano di 10: e 0,43429 è il logaritmo di 2,71828 base Neperiana, preso nel sistema Brigiano.

236. *Problema.* Trovare il logaritmo Neperiano di 100.

Sarà $L.\,100 = 2{,}30258 \times l.\,100 = 2{,}30258 \times 2 = 4{,}60516$.

237. *Problema.* Sia 3,45723 un logaritmo Neperiano, se ne vuò conoscere il numero corrispondente.

Essendo $L.\,M = 2{,}30258 \times l.\,M$, avremo $3{,}45723 =$

$$2{,}30258 \times l.\,M\text{, ed } l.\,M = \frac{3{,}45723}{2{,}30258}\text{; e } \log.(l.\,M) =$$

$$\log.3{,}45723 - \log.\,2{,}30258 = 0{,}53873 - 0{,}36229 = 0{,}17644:$$

e passando ai numeri $l.\,M = 1{,}50000$ circa: e passando di nuovo ai numeri $M = 31{,}6$. circa.

L'oggetto de' due ultimi problemi è stato quello di far conoscere nelle due dette circostanze qual metodo convien tenere, anzichè mostrare una esattezza più che approssimata nella esecuzione de' calcoli.